

数 学(文科)

2019.10

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

1. 若向量 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (3, -1)$, 则与 $\vec{a} + \vec{b}$ 共线的向量是

- A. $(-1, 1)$ B. $(-3, -4)$ C. $(-4, 3)$ D. $(2, -3)$

2. 若定义形如“132”这样中间大于两边的数叫凸数,现从用 2、3、7 三个数组成没有重复数字的三位数中任取一个,则该数为凸数的概率为

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

3. 能使得复数 $z = a - 2 + ai^3$ ($a \in \mathbb{R}$) 位于第三象限的是

- A. $2a - 1 + 2i$ 为纯虚数 B. $1 + 2ai$ 模长为 3
C. $3 + ai$ 与 $3 + 2i$ 互为共轭复数 D. $a > 0$

4. 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | x^2 - 2(m+1)x + m < 0\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 m 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $[-1, 0)$ D. $(-\infty, 0)$

5. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 2$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{2}$

6. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 相邻两对称轴的距离为 2π , 则以下说法正确的是

- A. $\omega = 2$ B. 函数 $f(x)$ 的一个周期是 2π
C. 函数 $f(x)$ 的一个零点为 $-\frac{2\pi}{3}$ D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$, 且 $a_4, a_6 + 1, a_7$ 成等差数列, 则该数列公比 q 为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 4 D. 2

8. 已知点 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 满足 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, M 为 AB 中点, 点 P 在 $\triangle AOC$ 内 (不含边界), 若 $\vec{BP} = x\vec{BM} + y\vec{BC}$, 则 $x+y$ 的取值范围是

- A. $(1, 2)$ B. $(\frac{2}{3}, 2)$ C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$

9. 若 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \frac{1}{2}$, $BC = 2$, 则 $\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{AC}|}$ 的最大值是

- A. $2\sqrt{2}$ B. $1 + \sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

10. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线 l 与双曲线的左右支分别交于点

A, B , 若 $BF_1 = 6a$, $\angle F_1 B F_2 = 60^\circ$, 则 $S_{\triangle A F_1 F_2} : S_{\triangle B F_1 F_2} =$

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = (2x + 1)e^x$, 以下列命题:

- ① 当 $x > 0$ 时, $f(x) = (2x - 1)e^x$ ② $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2})$
③ 函数 $f(x)$ 共有 2 个零点 ④ $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < 2$

其中正确命题个数是

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. 已知点 O 为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a = 3$, 若 $\vec{BO} \cdot \vec{AC} = 2$, 则当角 C 取到最大值时 $\triangle ABC$ 的面积为

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 幂函数 $f(x) = (m^2 + 2m - 2)x^m$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 则实数 m 的值为_____.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_6 + a_{11} = 2\pi$, 则 $\cos(a_3 + a_9)$ 的值为_____.

15. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 且 $\ln a = a - 1$, $b \ln b = 1$, $ce^c = 1$, 则 a, b, c 的大小关系是_____.

16. 已知夹角为 60° 的向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, 若 $|\vec{p} + \vec{b}| = 1$, $\vec{q} = \vec{a} + \lambda \vec{b} (\lambda \in \mathbf{R})$, 则 $|\vec{p} - \vec{q}|$ 的最小值为_____.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 1, a_{n+1} = S_n + n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求证: $\{a_n + 1\}$ 为等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = a_n + 2n$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

已知向量 $\vec{a} = (\cos(\pi - x), \sin x)$, $\vec{b} = (\sin x, \cos(\frac{\pi}{2} + x))$, 设函数 $f(x) = 1 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 设函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$

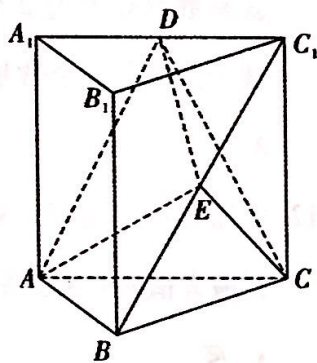
$(x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}])$ 的值域.

19. (12 分)

如图所示, 正三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中, $A_1A = 4$, D, E 分别为 A_1C_1, BC_1 的中点.

(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 A_1ABB_1 ;

(2) 若三棱锥 $E - ACD$ 的体积为 $2\sqrt{3}$, 求该三棱柱底面边长.



20. (12 分)

已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 且椭圆 C 的上顶点到左、右顶点的距离之和为 $2\sqrt{7}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过点 F_1 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 若以 AB 为直径的圆过 F_2 , 求直线 l 的方程.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2, a \in \mathbb{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 存在单调增区间, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 x_1, x_2 为函数 $f(x)$ 的两个不同极值点, 证明: $x_1^2 x_2 > e^{-1}$.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑.

22. (10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 E 的极坐标方程为 $\rho = \frac{4 \tan \theta}{\cos \theta}$, 以极点 O 为原点, 极轴所在直线为 x 轴建立直角坐标系. 过点

$M(1, 1)$ 作倾斜角为 $\alpha (\alpha \in (0, \pi))$ 的直线 l 交曲线 E 于 A, B 两点.

(1) 求曲线 E 的直角坐标方程, 并写出直线 l 的参数方程;

(2) 过点 $M(1, 1)$ 的另一条直线 l' 与 l 关于直线 $x = 1$ 对称, 且与曲线 E 交于 C, D 两点, 求证:

$$|MA| : |MD| = |MC| : |MB|.$$

23. (10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| + |x-a|, g(x) = -x^2 - x + 2$.

(1) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 $2a^2$, 求实数 a 的值;

(2) 当 $x \in [-1, +\infty)$ 时, 函数 $y = f(x)$ 图象恒在函数 $y = g(x)$ 图象的上方, 求 a 的取值范围.