

重庆八中 2020—2021 学年度（上）半期考试高一年级 数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $P = \{x | x^2 + x - 2 \leq 0\}$, $Q = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 则 $P \cap Q = ()$

- A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 命题“ $\forall x > 0, x^2 + 2x \geq 0$ ”的否定是 ()

- A. $\exists x \leq 0, x^2 + 2x < 0$ B. $\forall x > 0, x^2 + 2x < 0$
C. $\exists x > 0, x^2 + 2x \geq 0$ D. $\exists x > 0, x^2 + 2x < 0$

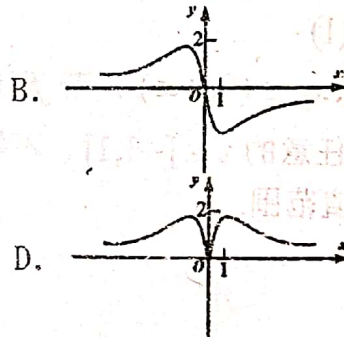
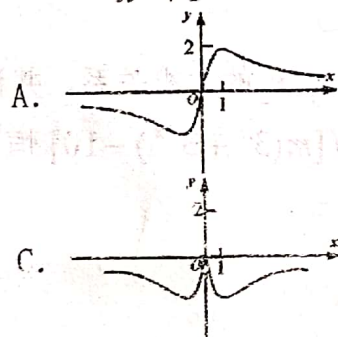
3. “ $x > 1, y > 1$ ”是“ $x + y > 2$ ”的 () 条件

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

4. 设 $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, 则 $f\left(\frac{1}{x}\right) = ()$

- A. $f(x)$ B. $-f(x)$ C. $1 - f(x)$ D. $\frac{1}{f(x)}$

5. 函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为 ()



6. 函数 $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ 的单调增区间是 ()

- A. $[-1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1]$ D. $(-\infty, -3]$

7. 若 $x > 0, y > 0$, 且满足 $\frac{9}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 2$, 则 $x + y$ 的最小值是 ()

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

8. 设 $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^b < \left(\frac{1}{2}\right)^a < 1$, 则下列说法一定正确的是 ()

- A. $b^a < b^b < a^a$ B. $a^b < a^a < b^a$ C. $a^b < b^a < a^a$ D. $a^b < b^b < a^a$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的。全选对得 5 分，选对但不全的得 3 分，有选错的得 0 分。

9. 下列各组函数是同一函数的有 ()

A. $f(x) = 2^{2x}$ 和 $g(x) = 4^x$

B. $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ 和 $g(x) = \sqrt{x^2-1}$

C. $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = \sqrt[3]{x^6}$

D. $f(x) = |x-2|$ 和 $g(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x < 2 \end{cases}$

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 则下列函数中为奇函数的是 ()

A. $y = f(-x)$

B. $y = f(x) + x^3$

C. $y = \frac{f(x)}{x}$

D. $y = \sqrt{x^3} f(x)$

11. 下列说法正确的有 ()

A. 若 $a > b$, 那么 $\frac{1}{a^3} < \frac{1}{b^3}$

B. 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

C. 若 $x > 0$, 则 $x + \frac{4}{x+2}$ 有最小值 2

D. 若 $x \in R$, 则 $\frac{2x}{x^2+1}$ 有最大值 1

12. 高斯函数是数学中的一个重要函数, 在自然科学、社会科学以及工程学等领域都能看到它的身影. 设 $x \in R$, 用符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 如 $[1.6] = 1, [-1.6] = -2$, 称函数 $f(x) = [x]$ 叫做高斯函数. 下列关于高斯函数 $f(x) = [x]$ 的说法正确的有 ()

A. $f(-2) = -2$

B. 若 $f(a) = f(b)$, 则 $|a-b| \leq 1$

C. 函数 $y = f(x) - x$ 的值域是 $[0, 1)$

D. 函数 $y = x \cdot f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 计算: $\sqrt[4]{(-3)^4} + (\pi-3)^0 + \log_2 64 - 27^{\frac{2}{3}} =$ _____.

14. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \left(2 - \frac{a}{3}\right)x + 2, & x \leq 1 \\ a^x, & x > 1 \end{cases}$ 在 R 上单调递增, 则 a 的取值范围为_____.

15. 已知函数 $f(x) = |2^x - 2| (x \leq 1)$, 则 $f(x)$ 值域为_____.

16. 已知 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 如果 $f(ax+1) \leq f(x-2)$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题: 共 70 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知集合 $A = \{x \mid |x-2| \leq 1\}$, $B = \{x \mid \frac{x+1}{x-2} > 0\}$.

(1) 求 $A \cap B$;

(2) 求 $(\complement_R A) \cup B$;

18. (12分) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

(1) 记函数 $F(x) = 2^{f(x)}$, 求函数 $F(x)$ 在 $[0, 3]$ 上的最值;

(2) 若函数 $y = g(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $g(x) = f(x)$, 求函数 $g(x)$ 的解析式.

19. (12分) 已知函数 $f(x) = a \cdot 4^x - a \cdot 2^{x+1} + 1 - b (a > 0)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为 9, 最小值为 1.

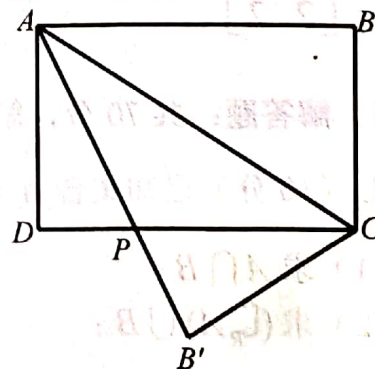
(1) 求 a, b 的值;

(2) 若方程 $f(x) - k \cdot 2^x = 0$ 在 $[-1, 2]$ 上有两个不同的解, 求实数 k 的取值范围.

20. (12分) 如图所示, 设矩形 $ABCD (AB > AD)$ 的周长为 20cm, 把 $\triangle ABC$ 沿 AC 向 $\triangle ADC$ 折叠, AB 折过去后交 DC 于点 P , 设 $AB = x$ cm, $AP = y$ cm.

(1) 建立变量 y 与 x 之间的函数关系式 $y = f(x)$, 并写出函数 $y = f(x)$ 的定义域;

(2) 求 $\triangle ADP$ 的最大面积以及此时的 x 的值.



21. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 + x + c (a > 0)$ 满足:

①函数 $f(x - \frac{1}{4})$ 是偶函数; ②关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $(m, 1) (m < 1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $g(x) = f(x) + (4k + 3)x (k \in R)$ 在 $[1, 3]$ 上的最小值 $h(k)$.

22. (12 分) 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: ①对任意的 $x, y \in (0, +\infty)$, 都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$; ②当且仅当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$ 成立.

(1) 求 $f(1)$;

(2) 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 若 $f(x_1) < f(x_2)$, 试比较 x_1, x_2 的大小关系, 并说明理由;

(3) 若对任意的 $x \in [-1, 1]$, 不等式 $f(3^{2x} + 3^{-2x}) \leq f[m(3^x + 3^{-x}) - 10]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

重庆八中 2020—2021 学年度（上）半期考试高一年级

数 学 试 题 参 考 答 案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	A	C	A	B	A	B

解析：

$$\text{【7】 } x + y = (x + 1) + (y + 1) - 2 = [(x + 1) + (y + 1)] \left(\frac{9}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} \right) \times \frac{1}{2} - 2$$

$$= (10 + \frac{9(y + 1)}{x + 1} + \frac{x + 1}{y + 1}) \times \frac{1}{2} - 2 \geq (10 + 2\sqrt{9}) \times \frac{1}{2} - 2 = 6$$

$$\text{当且仅当 } \frac{9(y + 1)}{x + 1} = \frac{x + 1}{y + 1} \text{ 即 } x = 5, y = 1 \text{ 时取 “=”}$$

【8】依题意有： $0 < a < b < 1$ ，由指数函数 $y = a^x (0 < a < 1)$ 单调递减可得： $a^a > a^b$

由幂函数 $y = x^a (0 < a < 1)$ 单调递增可得： $a^a < b^a$ ，于是： $a^b < a^a < b^a$

同理可得： $a^b < b^b < b^a$ ，对于 a^a 和 b^b 而言，无法比较大小，反例如下：

当 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$ 时， $a^a < b^b$ ；当 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ 时， $a^a = b^b$ ；当 $a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{2}$ 时， $a^a > b^b$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的。全选对得 5 分，选对但不全的得 3 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	ACD	AB	BD	ABD

解析：

【9】B 答案两个函数的定义域不一样

【10】C 答案是偶函数，D 答案定义域是 $[0, +\infty)$ ，没有奇偶性

【11】A 答案反例： $a = 1, b = -1, \frac{1}{a^3} > \frac{1}{b^3}$ ；C 答案取等条件为 $x = 0$ ，但是取不到

【12】C 答案函数 $y = f(x) - x$ 的值域应该是 $(-1, 0]$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	13	14	15	16
答案	1	$3 \leq a < 6$	$[0, 2)$	$-1 \leq a \leq -\frac{1}{3}$

解析：

【16】依题意有： $|ax+1| \leq |x-2| = 2-x$ ($\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$)，于是 $x-2 \leq ax+1 \leq 2-x$

由 $ax+1 \geq x-2$ 恒成立可得： $a \geq (1-\frac{3}{x})_{\max}$ ，于是 $a \geq -1$

由 $ax+1 \leq 2-x$ 恒成立可得： $a \leq (\frac{1}{x}-1)_{\min}$ ，于是 $a \leq -\frac{1}{3}$

于是：实数 a 的取值范围是： $-1 \leq a \leq -\frac{1}{3}$

四、解答题：共 70 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

【17】解：(1) 依题意有： $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$ ，.....2 分

$B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$ 4 分

于是： $A \cap B = \{x | 2 < x \leq 3\}$ 5 分

(2) 依题意有： $\complement_R A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$ 7 分

于是： $(\complement_R A) \cup B = \{x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$ 10 分

【18】解：(1) 记 $t = f(x) = x^2 - 2x + 2$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减，在 $[1, 3]$ 上单调递增，

$y = 2^t$ 在 $t \in R$ 时单调递增，2 分

于是函数 $y = F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减，在 $[1, 3]$ 上单调递增，于是

$F(x)_{\max} = F(3) = 2^5 = 32$ ，4 分

$F(x)_{\min} = F(1) = 2^1 = 2$ 6 分

(2) 依题意有：当 $x \geq 0$ 时， $g(x) = x^2 - 2x + 2$ ；当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，于是：

$g(-x) = x^2 + 2x + 2$ ，又函数 $g(x)$ 为偶函数， $g(-x) = g(x)$ ，即： $g(x) = x^2 + 2x + 2$

.....11 分

综上： $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, x < 0 \\ x^2 - 2x + 2, x \geq 0 \end{cases}$

.....12 分

【19】(1) 令 $t = 2^x \in [2, 4]$ ，则 $y = at^2 - 2at + 1 - b$ 在 $t \in [2, 4]$ 上单调递增

.....2 分

于是： $y_{\max} = 8a + 1 - b = 9$ ， $y_{\min} = 1 - b = 1$ ，

.....4 分

解得： $a = 1, b = 0$

.....5 分

(2) 令 $t = 2^x \in [\frac{1}{2}, 4]$ ，于是方程可变为： $t^2 - 2t + 1 - kt = 0$ ，即

$k = t + \frac{1}{t} - 2$

.....7 分

由于函数 $y = t + \frac{1}{t} - 2$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 单调递减，在 $[1, 4]$ 单调递增，且 $y_{t=1} = 0$ ， $y_{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ ，

.....9 分

$y_{t=4} = \frac{9}{4}$ ，

.....10 分

要使方程有两个不同的解，则 $0 < k \leq \frac{1}{2}$

.....12 分

【20】(1) 依题意有： $AD = 10 - x$ ， $DP = x - y$

在 $Rt\triangle ADP$ 中，有 $(10 - x)^2 + (x - y)^2 = y^2$ ，化简得： $y = x + \frac{50}{x} - 10$ ，即

$f(x) = x + \frac{50}{x} - 10$

.....4 分

由 $x > 10 - x > 0$ 可得函数 $f(x)$ 的定义域为： $(5, 10)$

.....5 分

(2) 依题意有： $S = \frac{1}{2} \times DP \times AD = \frac{1}{2} \times (x - y) \times (10 - x) = \frac{1}{2} \times (10 - x) \times (10 - \frac{50}{x})$

$$= \frac{1}{2} \times [150 - (\frac{500}{x} + 10x)] \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

由基本不等式可得： $\frac{500}{x} + 10x \geq 2\sqrt{5000} = 100\sqrt{2}$ ，当且仅当 $\frac{500}{x} = 10x$ 即 $x = 5\sqrt{2}$ 时取等号，
9 分

$$\text{于是 } S \leq \frac{1}{2} \times (150 - 100\sqrt{2}) = 75 - 50\sqrt{2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

综上： $\triangle ADP$ 的最大面积为 $(75 - 50\sqrt{2})\text{cm}^2$ ，此时 $x = 5\sqrt{2}$ 12 分

【21】 (1) 由①可得：函数 $f(x)$ 关于 $x = -\frac{1}{4}$ 对称，则有 $-\frac{1}{2a} = -\frac{1}{4}$ ，得 $a = 2$...2 分

由②可得： $x = 1$ 是方程 $ax^2 + x + c = 0$ 的一个解，则有 $a + 1 + c = 0$ ，得 $c = -3$...4 分

于是： $f(x) = 2x^2 + x - 3$ 5 分

(2) 依题意有： $g(x) = 2x^2 + (4k + 1)x - 3$ ，对称轴为 $x = -(k + 1)$

当 $-(k + 1) \geq 3$ 即 $k \leq -4$ 时， $g(x)$ 在 $[1, 3]$ 单调递减，于是 $g(x)_{\min} = g(3) = 12k + 27$
7 分

当 $1 < -(k + 1) < 3$ 即 $-4 < k < -2$ 时， $g(x)$ 在 $[1, -(k + 1)]$ 单调递减，在 $[-(k + 1), 3]$ 单调递增，于是 $g(x)_{\min} = g(-(k + 1)) = -2k^2 - 4k - 5$ 9 分

当 $-(k + 1) \leq 1$ 即 $k \geq -2$ 时， $g(x)$ 在 $[1, 3]$ 单调递增，于是 $g(x)_{\min} = g(1) = 4k + 3$
11 分

综上：

$$h(k) = \begin{cases} 12k + 27 (k \leq -4) \\ -2k^2 - 4k - 5 (-4 < k < -2) \\ 4k + 3 (k \geq -2) \end{cases} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

【22】 (1) 令 $x = y = 1$ 可得: $f(1) = 0$ 2 分

(2) $x_1 > x_2$, 理由如下: 记 $x_1 = kx_2$, 则 $f(x_1) = f(kx_2) = f(k) + f(x_2)$

由 $f(x_1) < f(x_2)$ 可得: $f(k) < 0$, 则 $k > 1$, 故 $x_1 > x_2$ 6 分

(3) 依题意有: $3^{2x} + 3^{-2x} \geq m(3^x + 3^{-x}) - 10 > 0$ 恒成立

令 $t = 3^x + 3^{-x} \in [2, \frac{10}{3}]$, 则 $3^{2x} + 3^{-2x} = t^2 - 2$,8 分

原不等式可化为: $t^2 - 2 \geq mt - 10 > 0$

由 $t^2 - 2 \geq mt - 10$ 恒成立可得: $m \leq (t + \frac{8}{t})_{\min}$, 于是 $m \leq 4\sqrt{2}$ 10 分

由 $mt - 10 > 0$ 恒成立可得: $m > (\frac{10}{t})_{\max}$, 于是 $m > 5$ 12 分

综上: 实数 m 的取值范围是 $5 < m \leq 4\sqrt{2}$ 12 分