

# 数 学 试 题

命题：李长江、皮伟 审核：方明 打印：皮伟 校对：李长江

一、选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 函数  $y = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$  的最小正周期为

- A.  $-\pi$  B.  $\pi$  C.  $2\pi$  D.  $4\pi$

2. 若命题  $p$ ：“ $\exists x \in R, x^2 + 2x + 1 \leq 0$ ”，则命题  $p$  的否定为

- A.  $\exists x \notin R, x^2 + 2x + 1 > 0$  B.  $\exists x \in R, x^2 + 2x + 1 < 0$   
C.  $\forall x \notin R, x^2 + 2x + 1 > 0$  D.  $\forall x \in R, x^2 + 2x + 1 > 0$

3. 在  $0^\circ \sim 360^\circ$  范围内，与  $-70^\circ$  终边相同的角是

- A.  $70^\circ$  B.  $110^\circ$  C.  $150^\circ$  D.  $290^\circ$

4. 下列函数定义域与值域相同的是

- A.  $y = 3^x$  B.  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  C.  $y = x^3$  D.  $y = \tan x$

5. 已知  $\cos 167^\circ = m$ ，则  $\tan 193^\circ =$

- A.  $\sqrt{1-m^2}$  B.  $\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$  C.  $-\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$  D.  $-\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

6. 设函数  $f(x)$  是定义在  $R$  上的偶函数，且当  $x \geq 0$  时， $f(x) = x^3 - 8$ ，则  $\{x | f(x-2) > 0\} =$

- A.  $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$  B.  $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$   
C.  $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 6\}$  D.  $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$

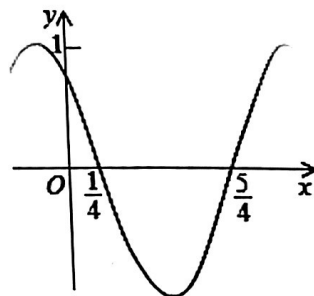
7. 函数  $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$  的部分图象如图所示。将  $f(x)$  图象上所有的点向右平移  $\frac{1}{2}$  个单位长度，所得图象的函数解析式是

A.  $y = \cos(\pi x - \frac{\pi}{4})$

B.  $y = -\sin(\pi x + \frac{\pi}{4})$

C.  $y = \cos(2x - \frac{1}{4})$

D.  $y = -\sin(2x + \frac{1}{4})$



8. 区块链作为一种革新的技术,已经被应用于许多领域,包括金融、政务服务、供应链、版权和专利、能源、物联网等。在区块链技术中,若密码的长度设定为 256 比特,则密码一共有  $2^{256}$  种可能,因此,为了破解密码,最坏情况需要进行  $2^{256}$  次哈希运算。现在有一台机器,每秒能进行  $2.5 \times 10^{11}$  次哈希运算,假设机器一直正常运转,那么在最坏情况下,这台机器破译密码所需时间大约为  
(参考数据  $\lg 2 \approx 0.3010, \lg 3 \approx 0.4771$ )

- A.  $4.5 \times 10^{73}$  秒      B.  $4.5 \times 10^{65}$  秒      C.  $4.5 \times 10^7$  秒      D. 28 秒

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分。

9. 下列各式的值小于 1 的是

- A.  $\tan 15^\circ$       B.  $4 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$   
C.  $2 \cos^2 22.5^\circ - 1$       D.  $\frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ}$

10. 下列关于函数  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$  说法正确的是

- A. 周期为  $\pi$       B. 增区间是  $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}] (k \in \mathbb{Z})$   
C. 图像关于点  $(-\frac{\pi}{3}, 0)$  对称      D. 图像关于直线  $x = \frac{2\pi}{3}$  对称

11. 十六世纪中叶, 英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把“=”作为等号使用, 后来英国数学家哈利奥特首次使用“<”和“>”符号, 并逐渐被数学界接受, 不等号的引入对不等式的发展影响深远。若小融从家到学校往返速度分别为  $m$  和  $n$  ( $0 < m < n$ ), 其全程的平均速度为  $v$ , 则下列选项正确的是

- A.  $m < v < \sqrt{mn}$       B.  $v = \sqrt{mn}$       C.  $\sqrt{mn} < v < \frac{m+n}{2}$       D.  $v = \frac{2mn}{m+n}$

12. 对于函数  $f(x) = \sin^k x + \cos^k x, k \in \mathbb{N}_+$ , 下列说法正确的是

- A. 对任意的  $k$ ,  $f(x)$  的最大值为 1  
B. 当  $k=2$  时,  $f(x)$  的值域中只有一个元素  
C. 当  $k=3$  时,  $f(x)$  在  $(0, 2\pi)$  内只有一个零点  
D. 当  $k=4$  时,  $f(x)$  的值域为  $[\frac{1}{2}, 1]$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知幂函数  $v = f(x)$  的图象过点  $(2, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 则  $f(16) =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知  $\cos \theta = -\frac{3}{5}, \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 则  $\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) =$  \_\_\_\_\_.

15. 在周长为  $4\pi$  的扇形中, 当扇形的面积最大时, 其弧长为 \_\_\_\_\_.

16. 已知  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2}), \alpha + 2\beta = \frac{2\pi}{3}, \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \beta = 3 - \sqrt{3}$ , 则  $\alpha - \beta =$  \_\_\_\_\_.

四. 解答题: 共 70 分. 解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知集合  $A = \{x \mid m-1 < x < m^2+1\}, B = \{x \mid x^2 < 4\}$ .

(1) 当  $m = 2$  时, 求  $A \cup B, A \cap B$ ;

(2) 若 " $x \in A$ " 是 " $x \in B$ " 成立的充分不必要条件, 求实数  $m$  的取值范围.

18. (12 分)

已知角  $\alpha$  的顶点与原点  $O$  重合, 始边与  $x$  轴的非负半轴重合, 它的终边与以原点为圆心的单位圆交于点  $P(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ .

(1) 求  $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$  和  $\sin 2\alpha$  的值;

(2) 求  $\frac{3\sin \alpha - 2\cos \alpha}{5\cos \alpha + 3\sin \alpha}$  的值.

19. (12 分)

某跨国饮料公司在对全世界所有人均 GDP (即人均纯收入) 在 0.5 ~ 8 千美元的地区销售该公司 A 饮料的情况调查时发现: 人均 GDP 处于中等的地区对该饮料的销售量最多, 然后向两边递减.

(1) 给出下列几个函数模型: ①  $y = ax^2 + bx$ ; ②  $y = kx + b$ ; ③  $y = \log_a x + b$ ;

④  $y = a^x + b$  ( $x$  表示人均 GDP, 单位: 千美元;  $y$  表示年人均 A 饮料的销售量, 单位: L). 用哪个函数模型来描述人均 GDP 与人均 A 饮料销售量的关系更合适? 说明理由.

(2) 若人均 GDP 为 1 千美元时, 年人均 A 饮料的销售量为 2 升, 人均 GDP 为 4 千美元时, 年人均 A 饮料的销售量为 5 升, 把 (1) 中你所选的函数模型求出来, 并求出各个区域中, 年人均 A 饮料的销售量最多是多少?

20. (12分)

已知函数  $f(x) = 3^x - a \cdot 3^{-x}$  为奇函数。

(1) 求  $a$  的值并判断  $f(x)$  的单调性；

(2) 若  $f(x-1) > \frac{8}{3}$ , 求  $x$  的取值范围。

21. (12分)

设  $a > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ , 函数  $f(x) = \log_2(x+a)$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}\log_2(3x+a)$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求  $f(x) - g(x)$  的最小值;

(2) 若  $f(x) < g(x)$ , 求  $a$  的取值范围。

22. (12分)

已知函数  $f(x) = 2\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos x - 1$ .

(1) 当  $x \in [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$  时, 求  $f(x)$  的值域;

(2) 是否同时存在实数  $a$  和正整数  $n$ , 使得函数  $g(x) = f(x) - a$  在  $x \in [0, n\pi]$  上恰有 2021 个零点? 若存在, 请求出所有符合条件的  $a$  和  $n$  的值; 若不存在, 请说明理由。

重庆八中 2020-2021 学年度（上）期末考试高一年级

数学试题参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	D	C	C	B	A	B	ACD	ABC	AD	BD

13.  $\frac{1}{4}$

14.  $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

15.  $2\pi$

16.  $-\frac{\pi}{12}$

四. 解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。请将正确答案做在答题卷相应位置，要有必要的推理或证明过程。）

17. 解：（1）因为  $A = \{x | 1 < x < 5\}$ ,  $B = \{x | -2 < x < 2\}$ ,

所以  $A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$ ,  $A \cup B = \{x | -2 < x < 5\}$ . .....5 分

（2）由题，集合  $A$  是集合  $B$  的真子集，由题意得  $m-1 < m^2+1$  恒成立，即集合  $A$  非空

所以  $\begin{cases} m-1 \geq -2, \\ m^2+1 \leq 2, \end{cases}$  且不同时取等，解得  $-1 < m \leq 1$ .

所以实数  $m$  的取值范围为  $(-1, 1]$ . .....10 分

18. 解：（1）根据题意  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ,

$$\text{所以 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{24}{25}. \quad \text{.....6 分}$$

（2）因为  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ,

$$\text{所以 } \frac{3\sin \alpha - 2\cos \alpha}{5\cos \alpha + 3\sin \alpha} = \frac{3\tan \alpha - 2}{5 + 3\tan \alpha} = \frac{3 \times (-\frac{3}{4}) - 2}{5 + 3 \times (-\frac{3}{4})} = -\frac{17}{11}. \quad \text{.....12 分}$$

19. 解: (1) 用①函数模型比较合适, 因为该饮料在人均 GDP 处于中等的地区销售量最多, 然后向两边递减, 而②③④表示的函数在区间上是单调函数, 所以②③④都不合适, 故用①比较合适. ....5 分

(2) 因为人均 GDP 在 1 千美元时, 年人均 A 饮料的销量为 2 升; 人均 GDP 为 4 千美元时, 年人均 A 饮料的销售量为 5 升, 把  $x=1, y=2$ ;  $x=4, y=5$  带入到  $y=ax^2+bx$

得  $\begin{cases} 2=a+b, \\ 5=16a+4b, \end{cases}$  解得  $a=-\frac{1}{4}, b=\frac{9}{4}$ , 所以函数解析式为

$$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}x(x \in [0.5, 8]) \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}x=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{16},$$

所以当  $x=\frac{9}{2}$  时, 年人均 A 饮料的销售量最多是  $\frac{81}{16}$  L. ....12 分

20. (1)  $f(-x)=3^{-x}-a \cdot 3^x$ , 因为  $f(x)$  为奇函数,

$$f(x)+f(-x)=(1-a)(3^x+3^{-x})=0, \text{ 于是 } a=1, \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

因为  $y=3^x$  在  $(-\infty, +\infty)$  是增函数, 且  $y=3^{-x}$  在  $(-\infty, +\infty)$  是减函数,

所以  $f(x)=3^x-3^{-x}$  在  $(-\infty, +\infty)$  是增函数. ....6 分

(2)  $f(x)=3^x-3^{-x}$  在  $(-\infty, +\infty)$  是增函数,  $f(1)=\frac{8}{3}$ , 于是由  $f(x-1)>f(1)$  可得

$-1>1$ , 解得  $x>2$ ,

以实数  $x$  的取值范围为  $(2, +\infty)$ . ....12 分

22.解: (1) 化简:  $f(x) = 2\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos x - 1 = 2(\sin x + \cos x) \cdot \cos x - 1$

$$= 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

当  $x \in [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$  时,  $2x + \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$\therefore \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \in [0, 1]$ , 则  $f(x) \in [0, \sqrt{2}]$ . .....4 分

(2) 假设同时存在实数  $a$  和正整数  $n$  满足条件, 函数  $g(x) = f(x) - a$  在  $x \in [0, n\pi]$  上

恰有 2021 个零点, 即函数  $y = f(x)$  与直线  $y = a$  在  $[0, n\pi]$  上恰有 2021 个交点

当  $x \in [0, \pi]$  时,  $2x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ ,

① 当  $a > \sqrt{2}$  或  $a < -\sqrt{2}$  时, 函数  $y = f(x)$  与直线  $y = a$  在  $[0, n\pi]$  上无交点, .....6 分

② 当  $a = \sqrt{2}$  或  $a = -\sqrt{2}$  时, 函数  $y = f(x)$  与直线  $y = a$  在  $[0, \pi]$  上有一个交点,

此时要使函数  $y = f(x)$  与直线  $y = a$  在  $[0, n\pi]$  上恰有 2021 个交点,

则  $n = 2021$ ; .....8 分

③ 当  $-\sqrt{2} < a < 1$  或  $1 < a < \sqrt{2}$  时, 函数  $y = f(x)$  与直线  $y = a$  在  $[0, \pi]$  上有两个交点,

此时函数  $y = f(x)$  与直线  $y = a$  在  $[0, n\pi]$  上有偶数个交点, 不符合题意; .....10 分

④ 当  $a = 1$  时, 函数  $y = f(x)$  与直线  $y = a$  在  $[0, \pi]$  上有三个交点,

此时要使函数  $y = f(x)$  与直线  $y = a$  在  $[0, n\pi]$  上恰有 2021 个交点, 则  $n = 1010$ ;

综上所述, 存在实数  $a$  和  $n$  满足题设条件:

$a = \sqrt{2}$  时,  $n = 2021$ ;

$a = -\sqrt{2}$  时,  $n = 2021$ ;

$a = 1$  时,  $n = 1010$ .

.....12 分

21. 解: (1) 当  $a=1$  时,  $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}\log_2 \frac{(x+1)^2}{3x+1}$ ,

设  $t=\frac{(x+1)^2}{3x+1}$ , 令  $u=3x+1$ , 则  $x=\frac{u-1}{3}$ ,

所以  $t=\frac{(\frac{u+2}{3})^2}{u}=\frac{1}{9}(u+\frac{4}{u}+4)$ ,

.....4 分

因为  $u+\frac{4}{u}\geq 4$ , 可得  $t\geq \frac{8}{9}$ , 当  $x=\frac{1}{3}$  处取得, 于是  $t$  的最小值为  $\frac{8}{9}$ .

所以  $f(x)-g(x)$  的最小值为  $\frac{1}{2}\log_2 \frac{8}{9}=\frac{3}{2}-\log_2 3$ .

.....6 分

(2) 依题意, 当  $x\in(0,1)$  时,  $f(x)-g(x)=\log_2(x+a)-\frac{1}{2}\log_2(3x+a)<0$  恒成立.

即  $x\in(0,1)$  时,  $\log_2(x+a)^2<\log_2(3x+a)$  恒成立,

即  $(x+a)^2<3x+a$ , 即  $x^2+(2a-3)x+a^2-a<0$ ,

.....9 分

令  $h(x)=x^2+(2a-3)x+a^2-a$ , 则只需  $\begin{cases} h(0)\leq 0 \\ h(1)\leq 0 \end{cases}$ , 解得  $0\leq a\leq 1$ ,

所以  $a$  的范围是  $(0,1]$ .

.....12 分