

数 学 试 题

命题：李长江、皮伟 审核：方明 打印：皮伟 校对：李长江

一、选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 函数 $y = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$ 的最小正周期为

- A. $-\pi$ B. π C. 2π D. 4π

2. 若命题 p ：“ $\exists x \in R, x^2 + 2x + 1 \leq 0$ ”，则命题 p 的否定为

- A. $\exists x \notin R, x^2 + 2x + 1 > 0$ B. $\exists x \in R, x^2 + 2x + 1 < 0$
C. $\forall x \notin R, x^2 + 2x + 1 > 0$ D. $\forall x \in R, x^2 + 2x + 1 > 0$

3. 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，与 -70° 终边相同的角是

- A. 70° B. 110° C. 150° D. 290°

4. 下列函数定义域与值域相同的是

- A. $y = 3^x$ B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ C. $y = x^3$ D. $y = \tan x$

5. 已知 $\cos 167^\circ = m$ ，则 $\tan 193^\circ =$

- A. $\sqrt{1-m^2}$ B. $\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$ C. $-\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$ D. $-\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

6. 设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^3 - 8$ ，则 $\{x | f(x-2) > 0\} =$

- A. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$ B. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$
C. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 6\}$ D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$

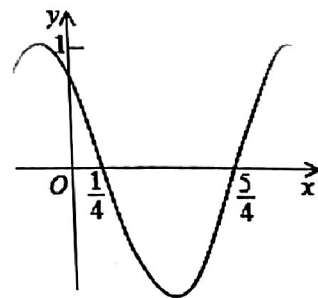
7. 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示。将 $f(x)$ 图象上所有的点向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，所得图象的函数解析式是

A. $y = \cos(\pi x - \frac{\pi}{4})$

B. $y = -\sin(\pi x + \frac{\pi}{4})$

C. $y = \cos(2x - \frac{1}{4})$

D. $y = -\sin(2x + \frac{1}{4})$



8. 区块链作为一种革新的技术，已经被应用于许多领域，包括金融、政务服务、供应链、版权和专利、能源、物联网等。在区块链技术中，若密码的长度设定为 256 比特，则密码一共有 2^{256} 种可能，因此，为了破解密码，最坏情况需要进行 2^{256} 次哈希运算。现在有一台机器，每秒能进行 2.5×10^{11} 次哈希运算，假设机器一直正常运转，那么在最坏情况下，这台机器破译密码所需时间大约为

(参考数据 $\lg 2 \approx 0.3010, \lg 3 \approx 0.4771$)

- A. 4.5×10^{73} 秒 B. 4.5×10^{65} 秒 C. 4.5×10^7 秒 D. 28 秒

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9. 下列各式的值小于 1 的是

A. $\tan 15^\circ$

B. $4 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$

C. $2 \cos^2 22.5^\circ - 1$

D. $\frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ}$

10. 下列关于函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 说法正确的是

A. 周期为 π

B. 增区间是 $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}] (k \in \mathbb{Z})$

C. 图像关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称

D. 图象关于直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称

11. 十六世纪中叶，英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把“=”作为等号使用，后来英国数学家哈利奥特首次使用“<”和“>”符号，并逐渐被数学界接受，不等号的引入对不等式的发展影响深远。若小融从家到学校往返速度分别为 m 和 n ($0 < m < n$)，其全程的平均速度为 v ，则下列选项正确的是

A. $m < v < \sqrt{mn}$

B. $v = \sqrt{mn}$

C. $\sqrt{mn} < v < \frac{m+n}{2}$

D. $v = \frac{2mn}{m+n}$

12. 对于函数 $f(x) = \sin^k x + \cos^k x, k \in \mathbb{N}_+$ ，下列说法正确的是

A. 对任意的 k ， $f(x)$ 的最大值为 1

B. 当 $k = 2$ 时， $f(x)$ 的值域中只有一个元素

C. 当 $k = 3$ 时， $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内只有一个零点

D. 当 $k = 4$ 时， $f(x)$ 的值域为 $[\frac{1}{2}, 1]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知幂函数 $v = f(x)$ 的图象过点 $(2, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，则 $f(16) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知 $\cos \theta = -\frac{3}{5}, \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，则 $\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 在周长为 4π 的扇形中，当扇形的面积最大时，其弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2}), \alpha + 2\beta = \frac{2\pi}{3}, \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \beta = 3 - \sqrt{3}$ ，则 $\alpha - \beta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

四.解答题:共70分。解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

已知集合 $A = \{x \mid m-1 < x < m^2+1\}$, $B = \{x \mid x^2 < 4\}$.

(1) 当 $m=2$ 时, 求 $A \cup B, A \cap B$;

(2) 若 " $x \in A$ " 是 " $x \in B$ " 成立的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围。

18. (12分)

已知角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边与以原点为圆心的单位圆交于点 $P\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

(1) 求 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 和 $\sin 2\alpha$ 的值;

(2) 求 $\frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\cos\alpha + 3\sin\alpha}$ 的值。

19. (12分)

某跨国饮料公司在对全世界所有人均 GDP (即人均纯收入) 在 0.5 ~ 8 千美元的地区销售该公司 A 饮料的情况调查时发现: 人均 GDP 处于中等的地区对该饮料的销售量最多, 然后向两边递减。

- (1) 给出下列几个函数模型: ① $y = ax^2 + bx$; ② $y = kx + b$; ③ $y = \log_a x + b$; ④ $y = a^x + b$ (x 表示人均 GDP, 单位: 千美元; y 表示年人均 A 饮料的销售量, 单位: L). 用哪个函数模型来描述人均 GDP 与人均 A 饮料销售量的关系更合适? 说明理由。

(2) 若人均 GDP 为 1 千美元时, 年人均 A 饮料的销售量为 2 升, 人均 GDP 为 4 千美元时, 年人均 A 饮料的销售量为 5 升, 把 (1) 中你所选的函数模型求出来, 并求出各个区域中, 年人均 A 饮料的销售量最多是多少?

20. (12分)

已知函数 $f(x) = 3^x - a \cdot 3^{-x}$ 为奇函数。

- (1) 求 a 的值并判断 $f(x)$ 的单调性; (2) 若 $f(x-1) > \frac{8}{3}$, 求 x 的取值范围。

21. (12分)

设 $a > 0$, $x \in (0, 1)$, 函数 $f(x) = \log_2(x + a)$, $g(x) = \frac{1}{2}\log_2(3x + a)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x) - g(x)$ 的最小值;

(2) 若 $f(x) < g(x)$, 求 a 的取值范围。

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos x - 1$.

(1) 当 $x \in [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$ 时, 求 $f(x)$ 的值域;

(2) 是否同时存在实数 a 和正整数 n , 使得函数 $g(x) = f(x) - a$ 在 $x \in [0, n\pi]$ 上恰有 2021 个零点? 若存在, 请求出所有符合条件的 a 和 n 的值; 若不存在, 请说明理由。

重庆八中 2020-2021 学年度（上）期末考试高一年级

数学试题参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	D	C	C	B	A	B	ACD	ABC	AD	BD

13. $\frac{1}{4}$

14. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

15. 2π

16. $-\frac{\pi}{12}$

四. 解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。请将正确答案做在答题卷相应位置，要有必要的推理或证明过程。）

17. 解：（1）因为 $A = \{x | 1 < x < 5\}$, $B = \{x | -2 < x < 2\}$,

所以 $A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$, $A \cup B = \{x | -2 < x < 5\}$5 分

（2）由题，集合 A 是集合 B 的真子集，由题意得 $m-1 < m^2+1$ 恒成立，即集合 A 非空

所以 $\begin{cases} m-1 \geq -2, \\ m^2+1 \leq 2, \end{cases}$ 且不同时取等，解得 $-1 < m \leq 1$.

所以实数 m 的取值范围为 $(-1, 1]$10 分

18. 解：（1）根据题意 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$,

$$\text{所以 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{24}{25}. \quad \text{.....6 分}$$

（2）因为 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$,

$$\text{所以 } \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 3 \sin \alpha} = \frac{3 \tan \alpha - 2}{5 + 3 \tan \alpha} = \frac{3 \times \left(-\frac{3}{4}\right) - 2}{5 + 3 \times \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{17}{11}. \quad \text{.....12 分}$$

19. 解: (1) 用①函数模型比较合适, 因为该饮料在人均 GDP 处于中等的地区销售量最多, 然后向两边递减, 而②③④表示的函数在区间上是单调函数, 所以②③④都不合适, 故用①比较合适.5 分

(2) 因为人均 GDP 在 1 千美元时, 年人均 A 饮料的销量为 2 升; 人均 GDP 为 4 千美元时, 年人均 A 饮料的销售量为 5 升, 把 $x=1, y=2$; $x=4, y=5$ 带入到 $y=ax^2+bx$

$$\text{得} \begin{cases} 2=a+b, \\ 5=16a+4b, \end{cases} \text{解得 } a=-\frac{1}{4}, b=\frac{9}{4}, \text{ 所以函数解析式为}$$

$$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}x(x \in [0.5, 8]) \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}x=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{16},$$

$$\text{所以当 } x=\frac{9}{2} \text{ 时, 年人均 A 饮料的销售量最多是 } \frac{81}{16} \text{ L.} \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (1) $f(-x)=3^{-x}-a \cdot 3^x$, 因为 $f(x)$ 为奇函数,

$$f(x)+f(-x)=(1-a)(3^x+3^{-x})=0, \text{ 于是 } a=1, \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

因为 $y=3^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是增函数, 且 $y=3^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是减函数,

所以 $f(x)=3^x-3^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是增函数.6 分

(2) $f(x)=3^x-3^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是增函数, $f(1)=\frac{8}{3}$, 于是由 $f(x-1)>f(1)$ 可得

$$x-1>1, \text{ 解得 } x>2,$$

以实数 x 的取值范围为 $(2, +\infty)$12 分

22.解: (1) 化简: $f(x) = 2\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos x - 1 = 2(\sin x + \cos x) \cdot \cos x - 1$

$$= 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

当 $x \in [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$ 时, $2x + \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$\therefore \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \in [0, 1]$, 则 $f(x) \in [0, \sqrt{2}]$.

.....4 分

(2) 假设同时存在实数 a 和正整数 n 满足条件, 函数 $g(x) = f(x) - a$ 在 $x \in [0, n\pi]$ 上

恰有 2021 个零点, 即函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 在 $[0, n\pi]$ 上恰有 2021 个交点

当 $x \in [0, \pi]$ 时, $2x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$,

① 当 $a > \sqrt{2}$ 或 $a < -\sqrt{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 在 $[0, n\pi]$ 上无交点,

.....6 分

② 当 $a = \sqrt{2}$ 或 $a = -\sqrt{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 在 $[0, \pi]$ 上有一个交点,

此时要使函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 在 $[0, n\pi]$ 上恰有 2021 个交点,

则 $n = 2021$;

.....8 分

③ 当 $-\sqrt{2} < a < 1$ 或 $1 < a < \sqrt{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个交点,

此时函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 在 $[0, n\pi]$ 上有偶数个交点, 不符合题意;

.....10 分

④ 当 $a = 1$ 时, 函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 在 $[0, \pi]$ 上有三个交点,

此时要使函数 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 在 $[0, n\pi]$ 上恰有 2021 个交点, 则 $n = 1010$;

综上所述, 存在实数 a 和 n 满足题设条件:

$a = \sqrt{2}$ 时, $n = 2021$;

$a = -\sqrt{2}$ 时, $n = 2021$;

$a = 1$ 时, $n = 1010$.

.....12 分

21. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}\log_2 \frac{(x+1)^2}{3x+1}$,

设 $t=\frac{(x+1)^2}{3x+1}$, 令 $u=3x+1$, 则 $x=\frac{u-1}{3}$,

$$\text{所以 } t = \frac{\left(\frac{u+2}{3}\right)^2}{u} = \frac{1}{9}\left(u + \frac{4}{u} + 4\right),$$

.....4 分

因为 $u + \frac{4}{u} \geq 4$, 可得 $t \geq \frac{8}{9}$, 当 $x = \frac{1}{3}$ 处取得, 于是 t 的最小值为 $\frac{8}{9}$.

所以 $f(x)-g(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}\log_2 \frac{8}{9} = \frac{3}{2} - \log_2 3$.

.....6 分

(2) 依题意, 当 $x \in (0,1)$ 时, $f(x)-g(x) = \log_2(x+a) - \frac{1}{2}\log_2(3x+a) < 0$ 恒成立.

即 $x \in (0,1)$ 时, $\log_2(x+a)^2 < \log_2(3x+a)$ 恒成立,

即 $(x+a)^2 < 3x+a$, 即 $x^2 + (2a-3)x + a^2 - a < 0$,

.....9 分

令 $h(x) = x^2 + (2a-3)x + a^2 - a$, 则只需 $\begin{cases} h(0) \leq 0 \\ h(1) \leq 0 \end{cases}$, 解得 $0 \leq a \leq 1$,

所以 a 的范围是 $(0,1]$.

.....12 分