

数学试题

一、选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{x | -1 < x < 2\}$ B. $\{x | -1 \leq x < 2\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1\}$

2. 已知 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\cos \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

3. 已知 $p: -1 \leq x < 3$, 若 p 是 q 充分不必要条件, 则 q 可以是 ()

- A. $x < 3$ B. $-1 \leq x < 2$ C. $-1 \leq x < 3$ D. $-2 \leq x < 0$

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_3(2-x), & x < 1 \\ 3^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$, 求 $f(-25) + f(\log_3 15) =$ ()

- A. 8 B. 9 C. 15 D. 16

5. 函数 $f(x) = \ln x + 3x - 15$ 的零点所在的区间为 ()

- A. (2, 3) B. (3, 4) C. (4, 5) D. (5, 6)

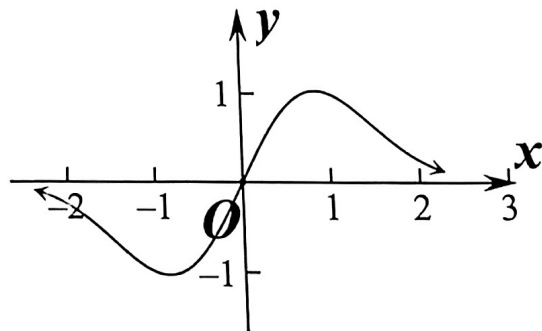
6. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()

A. $f(x) = x \cdot 2^{1-x^2}$

B. $f(x) = 2^{x-1} \cdot |x|$

C. $f(x) = x \cdot (|x| - 1)$

D. $f(x) = 2^x \cdot \sqrt{1-x^2}$



7. 已知函数 $f(x) = 2^{|x|} + x^2$, 设 $m = f(\log_2 \frac{1}{3})$, $n = f(7^{-0.1})$, $p = f(\log_4 25)$, 则 m, n, p 的大小关系为 ()

- A. $m > p > n$ B. $n > p > m$ C. $p > n > m$ D. $p > m > n$

8. 若 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2y} = 1$, 则 $2x+y$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. $2\sqrt{3}$ C. $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ D. $4 + 2\sqrt{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9. 下列说法正确的有 ()

A. 不等式 $\frac{2x-1}{3x+1} < 0$ 的解集是 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

B. $x > 0$ 且 $y > 0$ 是 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ 的充要条件

C. 函数 $y = x^2 - 3x - 4$ 的零点是 $(4, 0), (-1, 0)$

D. 已知 $x < \frac{5}{4}$, 则 $4x - 2 + \frac{1}{4x-5}$ 的最大值为 1

10. 若 $f(x) = \lg(|x-2|+1)$, 则下列命题正确的是 ()

A. $f(x+2)$ 是偶函数

B. $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增

C. $f(x)$ 没有最大值

D. $f(x)$ 没有最小值

11. 已知正实数 x, y 满足 $\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} y < (\frac{1}{2})^x - (\frac{1}{2})^y$, 则下列结论正确的是 ()

A. $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

B. $x^3 < y^3$

C. $\ln(y-x+1) > 0$

D. $2^{x-y} < \frac{1}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x < 2 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2}), & x > 2 \end{cases}$, 若实数 a, b, c 满足 $0 < a < b < c$, 且

$f(a) = f(b) = f(c)$, 下列结论中恒成立的是 ()

A. $ab=1$

B. $c-a = \frac{3}{2}$

C. $a+c < 2b$

D. $b^2 - \frac{4}{ac} < 0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $\cos \alpha > 0, \tan \alpha < 0$, 则 α 在第____象限.

14. 已知函数 $y = \log_a(x+3) + \frac{8}{9}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 也在函数

$f(x) = 3^x - b$ 的图象上, 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知扇形的弧长是 4cm , 面积是 2cm^2 , 则扇形的圆心角的弧度数的绝对值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知函数 $f(x) = x^2 - \log_a x \leq 0$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内恒成立, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四. 解答题: 共 70 分。解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤。

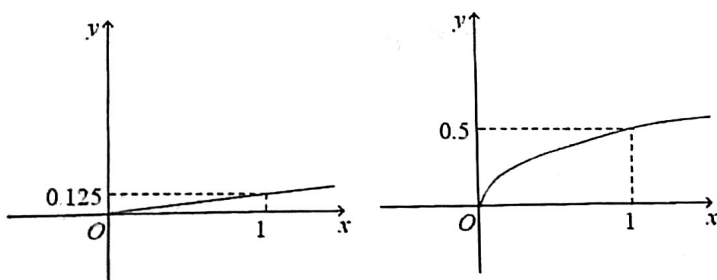
17. (10 分) 化简求值:

$$(1) (\sqrt[4]{2} \times \sqrt[3]{3})^4 + (-\pi)^0 - 2 \times \left(\frac{4}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad (2) \log_6(\log_2 64) + \lg \sqrt{0.1} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{6}{5} + \log_4 \frac{144}{25}.$$

18. (12 分) 已知 $\frac{2\sin\theta + \cos\theta}{3\cos\theta - \sin\theta} = 5$.

(1) 若 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 的值; (2) 求 $\frac{1}{\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}$ 的值.

19. (12 分) 某家庭进行理财投资, 根据长期收益率市场预测, 投资债券等稳健型产品的收益 $y = f(x)$ 与投资额成正比, 投资股票等风险型产品的收益 $y = g(x)$ 与投资额的算术平方根成正比. 已知投资 1 万元时两类产品的收益分别为 0.125 万元和 0.5 万元 (如图).



(1) 分别写出两种产品的收益与投资的函数关系;

(2) 该家庭现有 20 万元资金, 全部用于理财投资, 问: 怎样分配资金能使投资获得最大收益, 其最大收益为多少万元?

20. (12 分) 已知定义域为 R 的函数 $f(x) = a^x - (k-1)a^{-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) 是奇函数.

(1) 求实数 k 的值;

(2) 若 $f(1) < 0$, 不等式 $f(x^2 + tx) + f(4-x) > 0$ 对 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 求 t 的取值范围.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \log_4(2^{2x} + 1) + mx$ 的图象经过点 $P(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4} + \log_2 3)$.

(1) 求 m 的值并判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 设 $g(x) = \log_4(2^x + x + a)$, 若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 在 $x \in [-2, 2]$ 上有且只有一个解, 求 a 的取值范围.

22. (12 分) 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足: $\forall x_1, x_2 \in R$, 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 1$ 成立, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > -1$.

(1) 求证: $f(x)$ 为 R 上的增函数;

(2) 若 $f(1) = 1$, 且 $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, f[x^2 - m(2xy + y^2) + 4m^2y^2 + 4] \geq 7$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.