

# 重庆八中 2021—2022 学年度（上）半期考试高一年级

## 数 学 试 题

命题：熊翼 胡文琦      审核：张秀梅      打印：胡文琦      校对：熊翼

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ，记集合  $P = A \cup B$ ， $Q = A \cap B$ ，则

- A.  $1 \in P$       B.  $4 \notin P$       C.  $5 \in Q$       D.  $3 \notin Q$

2. 命题“对  $\forall x \in R$ ，都有  $\sin x \leq -1$ ”的否定为

- A. 对  $\forall x \in R$ ，都有  $\sin x > -1$       B. 对  $\forall x \in R$ ，都有  $\sin x \leq 1$   
C.  $\exists x_0 \in R$ ，使得  $\sin x_0 > -1$       D.  $\exists x_0 \in R$ ，使得  $\sin x_0 \leq -1$

3. 下列函数中，既是奇函数又是增函数的为

- A.  $y = x|x|$       B.  $y = -x^3$       C.  $y = 2x + 3$       D.  $y = -\frac{1}{x}$

4. 函数  $y = \frac{1}{x+1} - 1$  的值域是

- A.  $(-\infty, -1)$       B.  $(-1, +\infty)$       C.  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$       D.  $(-\infty, +\infty)$

5. 函数  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + (1-m)x + 3$  在区间  $(-\infty, 5]$  上单调递增，则实数  $m$  的取值范围是

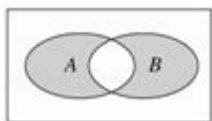
- A.  $(-\infty, 6]$       B.  $[6, +\infty)$       C.  $[-4, +\infty)$       D.  $(-\infty, -4]$

6. 已知  $a > 0$ ， $b > 0$ ， $a + b = 2$ ，则  $(a + \frac{2}{a})(b + \frac{2}{b})$  的最小值为

- A. 8      B.  $4\sqrt{3} - 4$       C. 9      D.  $4\sqrt{3} + 4$

7. 如图所示， $A$ ， $B$  是非空集合，定义集合  $A \# B$  为阴影部分表示的集合。若  $x, y \in R$ ，

$A = \{x | y = 1 + \sqrt{3x - x^2}\}$ ， $B = \{y | y = 2x, x > 0\}$ ，则  $A \# B$  为



- A.  $\{x | 0 < x < 3\}$       B.  $\{x | 1 < x \leq 3\}$       C.  $\{x | 0 \leq x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$       D.  $\{x | x = 0 \text{ 或 } x > 3\}$

8. 已知  $a > 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - \sqrt{a}|x|, & x \leq s, \\ kx + k - 1, & x > s, \end{cases}$ , 若对任意的实数  $s \in (-2, 2)$ , 都

有  $f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上至少存在两个零点, 则

- A.  $a \geq 4$ , 且  $k \geq 1$                       B.  $a \geq 4$ , 且  $0 < k \leq 1$   
C.  $0 < a < 4$ , 且  $k \geq 1$                       D.  $0 < a < 4$ , 且  $0 < k \leq 1$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知集合  $M = \{y | y = x - |x|, x \in \mathbb{R}\}$ ,  $N = \{y | y = x^{\frac{1}{2}}, x \neq 0\}$ , 则下列选项错误的有

- A.  $M = N$                       B.  $N \subseteq M$                       C.  $M = \complement_{\mathbb{R}} N$                       D.  $\complement_{\mathbb{R}} N \subseteq M$

10. 下列各组函数中, 表示同一函数的是

- A.  $f(t) = t^2$ ,  $g(s) = s^2$                       B.  $f(x) = x + 1$ ,  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$   
C.  $f(x) = |x|$ ,  $g(t) = \begin{cases} t & (t \geq 0) \\ -t & (t < 0) \end{cases}$                       D.  $f(x) = x$ ,  $g(x) = (\sqrt{|x|})^2$

11. 已知  $m > n > 1$ , 下列不等式中正确的是

- A.  $m^2 > mn$                       B.  $-n^2 < -mn$                       C.  $n + \frac{1}{n} \leq 2$                       D.  $\frac{1}{m-1} < \frac{1}{n-1}$

12. 已知集合  $A_0 = \{x | 0 < x < 1\}$ . 给定一个函数  $y = f(x)$ , 定义集合  $A_n = \{y | y = f(x),$

$x \in A_{n-1}\}$ . 若  $A_n \cap A_{n-1} = \emptyset$  对任意的  $n \in \mathbb{N}^*$  成立, 则称该函数  $y = f(x)$  具有性质

“ $p$ ”. 则下列函数中具有性质“ $p$ ”的是

- A.  $y = x + 1$                       B.  $y = \frac{1}{x}$                       C.  $y = x^2$                       D.  $y = x + \frac{1}{x}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若幂函数  $y = f(x)$  的图象过点  $(4, \frac{1}{2})$ , 则  $f(2)$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 若  $|x - a| < 1$  成立的充分不必要条件是  $2 < x < 3$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 已知  $f(x)$  为奇函数, 当  $x < 0$  时,  $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ; 当  $x > 0$  时,  $f(x)$  的解析式为  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

16. 设  $x \in \mathbb{R}$ , 对于使  $x^2 - 2x \geq M$  恒成立的所有常数  $M$  中, 我们把  $M$  的最大值  $-1$  叫做

$x^2 - 2x$  的下确界, 若  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 且  $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{a+b} = 1$ , 则  $2a+b$  的下确界为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. (10 分) 已知幂函数  $f(x) = (a^2 - 2a - 2)x^a$  ( $a \in R$ ) 在  $(0, +\infty)$  上单调递增．

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式；

(2) 解不等式  $f(x+5) < f(x^2 - 3x)$

18. (12 分) 已知集合  $A = \{x | x^2 - (3a+2)x + 2a^2 + 4a \leq 0\}$ ,  $B = \{x | 6 \leq x \leq 10\}$

(1) 当  $a = 6$  时, 求  $A \cup B$ ,  $A \cap (C_R B)$

(2) 从①  $B \cup (C_R A) = R$ ; ② “ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的必要不充分条件; ③  $A \cap (C_R B) = \emptyset$

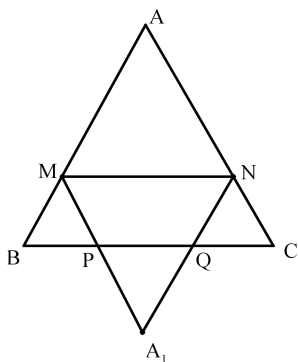
这三个条件中任选一个, 补充在下面横线上, 并进行解答.

问题: 若 \_\_\_\_\_, 求实数  $a$  的取值范围.

19. (12 分) 如图, 边长为 1 的正三角形纸片  $ABC$ ,  $M$ 、 $N$  分别为边  $AB$ 、 $AC$  上的点,  $MN \parallel BC$ , 将纸片沿着  $MN$  折叠, 使得点  $A$  落至点  $A_1$ ,  $MA_1$  交  $BC$  于点  $P$ ,  $NA_1$  交  $BC$  于点  $Q$ , 记  $AM = x$ , 四边形  $MNQP$  的面积为  $y$ .

(1) 建立变量  $y$  与  $x$  之间的函数关系式  $y = f(x)$ , 并写出函数  $y = f(x)$  的定义域;

(2) 求四边形  $MNQP$  的面积  $y$  的最大值以及此时的  $x$  的值.



20. (12 分) 已知关于  $x$  的不等式  $mx^2 - 5x + n > 0$  的解集为  $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ .

(1) 求实数  $m, n$  的值;

(2) 当  $x + y > 0$ ,  $z > -1$ , 且满足  $\frac{m}{x+y} + \frac{n}{z+1} = 1$  时, 有  $x + y + 2z \geq t^2 - 2t + 5$  恒成立, 求实数  $t$  的取值范围.

21. (12 分) 北京时间 2021 年 10 月 16 日 0 时 23 分, 搭载神舟十三号载人飞船的长征二号  $F$  遥十三运载火箭, 在酒泉卫星发射中心精准发射, 约 582 秒后, 飞船与火箭成功分离, 进入预定轨道, 发射取得圆满成功, 这是我国载人航天工程立项实施以来的第 21 次飞行任务, 也是空间站阶段的第 2 次载人飞行任务。航天工程对人们的生活产生方方面面的影响, 有关部门对某航模专卖店的商品销售情况进行调查发现: 该商品在过去的一个月 (以 30 天计) 的日销售价格  $P(x)$  (元) 与时间  $x$  (天) 的函数关系近似满足

$P(x) = 2 + \frac{k}{\sqrt{x-1}}$  (常数  $k > 0$ ). 该商品的日销售量  $Q(x)$  (百个) 与时间  $x$  (天) 部分数据如下表所示:

$x$ (天)	5	10	17	26
$Q(x)$ (百个)	4	5	6	7

已知第 10 天该商品的日销售收入为 3500 元.

(1) 求实数  $k$  的值;

(2) 给出以下三种函数模型:

①  $Q(x) = px + q$ , ②  $Q(x) = a|x - 18| + b$ ; ③  $Q(x) = m\sqrt{x-1} + n$

请你依据上表中的数据, 从以上三种函数模型中, 选择你认为最合适的一种函数模型, 来描述该商品的日销售量  $Q(x)$  与时间  $x$  的关系, 说明你选择的理由. 并借助你选择的模型, 预估该商品的日销售收入  $f(x)$  ( $1 \leq x \leq 30$ ,  $x \in N^+$ ) (元) 在哪一天达到最低?

22. (12 分) 已知函数  $f(x) = \frac{mx+n}{x^2+p}$  ( $m, n, p \in R$ ) 是定义在  $[-2, 2]$  上的奇函数, 且

$$f(1) = \frac{4}{5}, f(2) = 1.$$

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式;

(2) 令  $g(x) = kx^2 - 6kx - 6$  ( $k \neq 0$ ), 若对任意  $x_1 \in [-2, 2]$ , 总存在  $x_2 \in [2, 5]$ , 使得  $f(x_1) = g(x_2)$  成立, 求实数  $k$  的取值范围.

# 重庆八中高 2024 级高一（上）半期考试

## 数学参考答案

### 一、单选题

1. 【解答】解：由题意， $P = A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $Q = A \cap B = \{2, 3\}$ ，

故  $1 \in P$ ， $4 \in P$ ， $5 \notin Q$ ， $3 \in Q$ ，故选：A.

2. 【解答】解： $\therefore$  全称命题的否定是特称命题，

$\therefore$  命题“对  $\forall x \in R$ ，都有  $\sin x \leq -1$ ”的否定为： $\exists x_0 \in R$ ，使得  $\sin x_0 > -1$ ；故选：C.

3. 【解答】解：对于选项 A， $y = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ ，由图象可得此函数既是奇函数又是单调增函数；

对于选项 B，是单调减函数，不符合题意；对于选项 C，既不是奇函数又不是偶函数，不符合题意；

对于选项 D，不具有单调性，不符合题意. 故选：A.

4. 【解答】解：因为  $\frac{1}{x+1} \neq 0$ ，故  $\frac{1}{1+x} - 1 \neq -1$ ，故函数  $y = \frac{1}{x+1} - 1$  的值域  $\{y | y \neq -1\}$ . 故选：C.

5. 【解答】解：函数  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + (1-m)x + 3$  图象的对称轴为  $x = 1-m$ ，

$\therefore$  函数  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + (1-m)x + 3$  在区间  $(-\infty, 5]$  上单调递增，

$\therefore 1-m \geq 5$ ，解得  $m \leq -4$ . 所以  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -4]$ . 故选：D.

6. 【解答】解： $\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(b + \frac{2}{b}\right) = \left(a + \frac{2}{a}\right)\left(2-a + \frac{2}{2-a}\right) = 2a - a^2 + \frac{2a}{2-a} + \frac{4}{a} - 2 + \frac{4}{a(2-a)}$ ，

$= a(2-a) - 2 + \frac{2a^2 + 4(2-a) + 4}{a(2-a)} = a(2-a) + \frac{12}{a(2-a)} - 4$ ，又  $a(2-a) \in [0, 1]$ ，

$a(2-a) + \frac{12}{a(2-a)} - 4$  在  $a(2-a) = 1$  时取得最小值 9. 故选：C.

7. 【解答】解：A，B 是非空集合，定义集合  $A \# B$  为阴影部分表示的集合.

$x, y \in R$ ， $A = \{x | y = 1 + \sqrt{3x - x^2}\} = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{y | y = 2x, x > 0\} = \{y | y > 0\}$ ，

$A \cap B = \{x | 0 < x \leq 3\}$ ， $A \cup B = \{x | x \geq 0\}$ ，则  $A \# B = \complement_{A \cup B} (A \cap B) = \{x | x = 0 \text{ 或 } x > 3\}$ . 故选：D.

8. 【解答】解：由选项可得  $a > 0$ ， $k > 0$ ，设  $g(x) = x^2 - \sqrt{a}|x|$ ， $h(x) = kx + k - 1$ ，

由  $g(x)=0$ ，可得  $x=0$  和  $x=\pm\sqrt{a}$ ；由  $h(x)=0$ ，可得  $x=\frac{1}{k}-1$ ，

当  $0\leq s<2$  时， $f(x)$  总有两个零点  $0$  和  $-\sqrt{a}$ ；当  $-2<s<0$  时， $f(x)$  可能有两个零点  $-\sqrt{a}$  和  $\frac{1}{k}-1$ ，

又因为  $f(x)$  至少有两个零点，所以  $-\sqrt{a}$ ， $\frac{1}{k}-1$  均为零点，所以  $\begin{cases} -\sqrt{a}\leq s \\ \frac{1}{k}-1>s \end{cases}$ ，可得  $\begin{cases} -\sqrt{a}\leq -2 \\ \frac{1}{k}-1\geq 0 \end{cases}$ ，

解得  $\begin{cases} a\geq 4 \\ 0<k\leq 1 \end{cases}$ 。故选：B。

## 二、多选题

9. 【解答】解：对于集合  $M$ ：当  $x\geq 0$  时， $y=x-x=0$ ，当  $x<0$  时， $y=x+x=2x<0$ ，

所以集合  $M=\{y|y\leq 0\}$ ，而集合  $N=\{y|y>0\}$ ，所以  $C_R N=\{y|y\leq 0\}$ ，则  $M=C_R N$ ，故  $C$  正确， $A$ ， $B$ ， $D$  错误，故选：ABD。

10. 【解答】解：A. 两个函数的定义域和对应法则相同，是同一函数，

B.  $f(x)$  的定义域为  $R$ ， $g(x)$  的定义域为  $\{x|x\neq 1\}$ ，两个函数的定义域不相同，不是同一函数，

C.  $f(x)=\begin{cases} x(x\geq 0) \\ -x(x<0) \end{cases}$ ，两个函数的定义域和对应法则相同，是同一函数，

D.  $g(x)=|x|$ ，两个函数的对应法则不相同，不是同一函数，故选：AC。

11. 【解答】解： $m>n>1$ ， $\therefore m^2>mn$ ， $\therefore A$  正确， $B$ ： $\because m>n>1$ ， $\therefore mn>n^2$ ， $\therefore -mn<-n^2$ ，

$\therefore B$  错误， $C$ ：由基本不等式， $n+\frac{1}{n}\geq 2$   $\therefore C$  错误， $D$ ： $\because m>n>1$ ， $\therefore m-1>n-1>0$ ，

$\therefore \frac{1}{m-1}<\frac{1}{n-1}$ ， $\therefore D$  正确。故选：AD。

12. 【解答】解：对于  $A$ ， $y=x+1$ ，由  $A_0=\{x|0<x<1\}$ ， $A_n=\{y|y=f(x)，x\in A_{n-1}\}$ ，

可得  $A_1=\{y|1<y<2\}$ ， $A_2=\{y|2<y<3\}$ ， $\dots$ ， $A_{n-1}=\{y|n-1<y<n\}$ ， $A_n=\{y|n<y<n+1\}$ ，

满足  $A_n\cap A_{n-1}=\emptyset$  对任意的  $n\in N^*$  成立，故具有性质“ $p$ ”；

对于  $B$ ， $y=\frac{1}{x}$ ，由  $A_0=\{x|0<x<1\}$ ， $A_n=\{y|y=f(x)，x\in A_{n-1}\}$ ，可得  $A_1=\{y|y>1\}$ ，

$A_2=\{y|0<y<1\}$ ， $A_3=\{y|y>1\}$ ， $A_4=\{y|0<y<1\}$ ， $\dots$ ，满足  $A_n\cap A_{n-1}=\emptyset$  对任意的  $n\in N^*$  成立，故具有性质“ $p$ ”；

对于  $C$ ， $y=x^2$ ，由  $A_0=\{x|0<x<1\}$ ， $A_n=\{y|y=f(x)，x\in A_{n-1}\}$ ，可得  $A_1=\{y|0<y<1\}$ ，

$A_2 = \{y | 0 < y < 1\}$ , ..., 不满足  $A_n \cap A_{n-1} = \emptyset$  对任意的  $n \in N^*$  成立, 故不具有性质 “ $p$ ”;

对于  $D$ ,  $y = x + \frac{1}{x}$ , 由  $A_0 = \{x | 0 < x < 1\}$ ,  $A_n = \{y | y = f(x), x \in A_{n-1}\}$ , 可得  $A_1 = \{y | y > 2\}$ ,

$A_2 = \{y | y > \frac{5}{2}\}$ , ..., 不满足  $A_n \cap A_{n-1} = \emptyset$  对任意的  $n \in N^*$  成立, 故不具有性质 “ $p$ ”. 故选:  $AB$ .

### 三、填空题

13. 【解答】解: 设  $f(x) = x^\alpha$ , 把点  $(4, \frac{1}{2})$  代入得:  $\frac{1}{2} = 4^\alpha$ , 解得:  $\alpha = -\frac{1}{2}$ .  $\therefore f(2) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

故答案为:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

14. 【解答】解: 由  $|x-a| < 1$ , 得  $-1+a < x < 1+a$ , 根据题意知  $-1+a \leq 2 < 3 \leq 1+a$  (等号不同时成立),

解得  $2 \leq a \leq 3$ . 故答案为:  $[2, 3]$ .

15. 【解答】解: 任取  $x > 0$ ,  $-x < 0$ , 则  $f(-x) = x^2 - 3x - 1$ , 因为  $f(x)$  是奇函数, 所以

$f(-x) = x^2 - 3x - 1 = -f(x)$ , 解得  $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ .

16. 【解答】解: 设  $m = 2a + 1$ ,  $n = a + b$ , 则  $a = \frac{m-1}{2}$ ,  $b = n - \frac{m-1}{2}$ , 且  $m > 0$ ,  $n > 0$ ,

$$\therefore \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{a+b} = 1, \therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1,$$

$$\therefore 2a+b = 2 \cdot \frac{m-1}{2} + n - \frac{m-1}{2} = \frac{1}{2}m + n - \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2}m + n = (\frac{1}{2}m + n)(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} + \frac{m}{2n} + \frac{n}{m} + 1 \geq \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{m}{2n} \cdot \frac{n}{m}} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{m}{2n} = \frac{n}{m},$$

即  $m = \sqrt{2}n$  时, 等号成立,

$$\therefore 2a+b = \frac{1}{2}m + n - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2},$$

$\therefore 2a+b$  的下确界为  $1 + \sqrt{2}$ .

### 四、解答题

17. 解: (1) 有题意,  $a^2 - 2a - 2 = 1$  ..... 1 分

整理, 得:  $a^2 - 2a - 3 = 0$ , 解之, 得:  $a = -1$  或  $a = 3$  ..... 3 分

又  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $\therefore a = 3$  ..... 4 分

$\therefore f(x) = x^3$  ..... 5 分

(2)  $\because f(x) = x^3$  在  $R$  上单调递增 ..... 6 分

$\therefore f(x+5) < f(x^2-3x)$  等价于  $x+5 < x^2-3x$  ..... 8 分

整理, 得:  $x^2 - 4x - 5 > 0$ , 解之, 得:  $x < -1$  或  $x > 5$

$\therefore$  原不等式的解集为:  $x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$  ..... 10 分

18. 解: (1)  $\because a=6, \therefore A=\{x|x^2-20x+96\leq 0\}$ , 即:  $A=[8,12]$ .....2 分

$\therefore A\cup B=[6,12]$ .....4 分

又  $\because C_R B=(-\infty,6)\cup(10,+\infty)$ .....5 分

$\therefore A\cap(C_R B)=(10,12]$ .....6 分

(2) 若选①

$\because B\cup(C_R A)=R, \therefore A\subseteq B$ .....8 分

由  $x^2-(3a+2)x+2a^2+4a\leq 0$ , 得:  $(x-2a)[x-(a+2)]\leq 0$

当  $a=2$  时,  $A=\{4\}$

当  $a>2$  时,  $A=[a+2,2a]$

当  $a<2$  时,  $A=[2a,a+2]$

情形一: 当  $a=2$  时, 不合题意, 舍去

情形二: 当  $a>2$  时,  $\begin{cases} a>2 \\ a+2\geq 6, \text{解得: } 4\leq a\leq 5 \\ 2a\leq 10 \end{cases}$

情形三: 当  $a<2$  时,  $\begin{cases} a<2 \\ 2a\geq 6, \text{无解} \\ a+2\leq 10 \end{cases}$

综上所述,  $4\leq a\leq 5$ .....12 分

若选②

$\because "x\in B"$  是  $"x\in A"$  的必要不充分条件,  $\therefore A$  是  $B$  的真子集.....8 分

与选①的思路类似,  $4\leq a\leq 5$ .....12 分

若选③

$\because A\cap(C_R B)=\phi, \therefore A\subseteq B$ .....8 分

与选①的思路类似,  $4\leq a\leq 5$ .....12 分

19. 解: (1)  $\because AM=x, AB=1, \therefore BM=PM=BP=1-x$

$\therefore PQ=1-2(1-x)=2x-1, MN=AM=x$

$\therefore y=\frac{1}{2}[(2x-1)+x]\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(3x-1)(1-x)$

$\therefore f(x)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2+\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{4}$ .....5 分

$y=f(x)$  的定义域为:  $x\in(\frac{1}{2},1)$ .....6 分

(2) 法一:  $y=\frac{\sqrt{3}}{12}(3x-1)(3-3x)\leq\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot(\frac{2}{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{12}$ .....10 分

取等条件:  $3x-1=3-3x$  即:  $x=\frac{2}{3}$



$\therefore y$  的最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{12}$ , 此时的  $x$  的值为  $\frac{2}{3}$  .....12 分

20. 解: (1) 由题意, 2 和 3 均为  $mx^2 - 5x + n = 0$  的根,  $\therefore \begin{cases} 4m + n - 10 = 0 \\ 9m + n - 15 = 0 \end{cases}$ ,  $\therefore \begin{cases} m = 1 \\ n = 6 \end{cases}$  .....4 分

注: 若用韦达定理求出  $\begin{cases} m = 1 \\ n = 6 \end{cases}$ , 则需检验. 若未检验, 扣 1 分

(2) 由 (1) 小问, 有:  $\frac{1}{x+y} + \frac{6}{z+1} = 1$

$$\therefore x + y + 2z = x + y + 2(z+1) - 2 = [(x+y) + 2(z+1)] \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{6}{z+1}\right) - 2$$

$$= 11 + \frac{2(z+1)}{x+y} + \frac{6(x+y)}{z+1} \geq 11 + 4\sqrt{3} \text{ .....8 分}$$

取等条件:  $\frac{2(z+1)}{x+y} = \frac{6(x+y)}{z+1}$ , 即:  $z+1 = \sqrt{3}(x+y)$  .....9 分

$$\therefore t^2 - 2t + 5 \leq 11 + 4\sqrt{3}$$

$$\therefore (t-1)^2 \leq 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$$

$$\therefore |t-1| \leq 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore -1 - \sqrt{3} < t < 3 + \sqrt{3} \text{ .....12 分}$$

21. 解: (1) 有题意,  $500 \cdot (2 + \frac{k}{3}) = 3500$ ,  $\therefore k = 15$  .....2 分

(2)  $\because$  表格中  $Q(x)$  对应的数据匀速递增时,  $x$  对应的数据并未匀速变化,  $\therefore$  排除模型① .....3 分  
又  $\because Q(x) = a|x-18| + b$  表示在  $x=18$  两侧“等距”的函数值相等 (或叙述为函数图象必然关于直线  $x=18$  对称), 而表格中的数据并未体现此规律 ( $5 \neq 7$ ),  $\therefore$  排除模型② .....5 分

对于模型③, 将 (5,4), (10,5) 带入模型③, 有:  $\begin{cases} 2m + n = 4 \\ 3m + n = 5 \end{cases}$ , 解得:  $\begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$

此时,  $Q(x) = \sqrt{x-1} + 2$ , 经验证, (17,6), (26,7) 均满足,  $\therefore$  选模型③ .....8 分

$$f(x) = 100Q(x) \cdot P(x) = 100(\sqrt{x-1} + 2) \left( \frac{15}{\sqrt{x-1}} + 2 \right) = 100(19 + 2\sqrt{x-1} + \frac{30}{\sqrt{x-1}})$$

$$\geq 100 \times (19 + 4\sqrt{15}) = 1900 + 400\sqrt{15}$$

取等条件:  $2\sqrt{x-1} = \frac{30}{\sqrt{x-1}}$ , 即  $x = 16$

$\therefore$  第 16 天达到最低 .....12 分

22. 解: (1)  $\because f(x)$  是定义在  $[-2, 2]$  上的奇函数,  $\therefore f(0) = 0$ ,  $\therefore n = 0$  .....1 分

$$\text{又} \because f(1) = \frac{4}{5}, f(2) = 1, \therefore \begin{cases} \frac{m}{1+p} = \frac{4}{5} \\ \frac{2m}{4+p} = 1 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} m = 4 \\ p = 4 \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

经检验,  $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$  为奇函数

$$\therefore f(x) = \frac{4x}{x^2+4} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 问题转化为:  $f(x)$  的值域是  $g(x)$  的值域的子集

首先, 求  $f(x)$  的值域

下面证明  $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$  在  $[-2, 2]$  上单调递增

令  $\forall x_1, x_2 \in [-2, 2]$ , 不妨设  $-2 \leq x_1 < x_2 \leq 2$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = \dots = \frac{4(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 4)}{(x_1^2 + 4)(x_2^2 + 4)} < 0 \text{ 恒成立, } \therefore f(x) \text{ 在 } [-2, 2] \text{ 上单调递增} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) \in [-1, 1] \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

然后, 求  $g(x)$  的值域

注意到  $g(x) = kx^2 - 6kx - 6$  的对称轴为: 直线  $x = 3$

$$g(3) = -9k - 6, g(5) = -5k - 6$$

$$\text{情形一: } \begin{cases} k > 0 \\ -5k - 6 \geq 1 \\ -9k - 6 \leq -1 \end{cases}, \text{无解} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{情形二: } \begin{cases} k < 0 \\ -9k - 6 \geq 1 \\ -5k - 6 \leq -1 \end{cases}, \text{解得: } -1 \leq k \leq -\frac{7}{9}$$

$$\text{综上所述, } -1 \leq k \leq -\frac{7}{9} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$