

重庆八中高 2025 级高一（上）数学周日检测（一）

命题人：艾嵩、皮伟

一. 选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ ()

- A. $\{3\}$ B. $\{1, 6\}$ C. $\{5, 6\}$ D. $\{1, 3\}$

2. 若函数 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 且 $f(m) = 4$, 则实数 m 的值为 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{6}$ 或 $-\sqrt{6}$ C. $-\sqrt{6}$ D. 3

3. 定义在 \mathbb{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足：对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则 ()

- A. $f(3) < f(-2) < f(1)$ B. $f(1) < f(-2) < f(3)$
C. $f(-2) < f(1) < f(3)$ D. $f(3) < f(1) < f(-2)$

4. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + 2bx + 4 < 0$ 的解集为 $\left(m, \frac{4}{m}\right)$, 其中 $m < 0$, 则 $\frac{b}{4a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 ()

- A. -2 B. 1 C. 2 D. 8

5. 若函数 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x + 4a, & x < 1 \\ -ax, & x \geq 1 \end{cases}$, 是定义在 \mathbb{R} 上的减函数, 则 a 的取值范围 ()

- A. $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ C. $\left[\frac{1}{8}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

6. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数, 且 $F(x) = f(x) + g(x) + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最大值 8, 则在 $(-\infty, 0)$ 上 $F(x)$ 有 ()

- A. 最小值 -8 B. 最大值 -8 C. 最小值 -6 D. 最小值 -4

7. 函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$, 当 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 时都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 且对任意的

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 不等式 $f(ax+1) \leq f(x-2)$ 恒成立. 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[-5, 1]$ B. $[-5, 0]$ C. $[-2, 0]$ D. $[-2, 1]$

8. 已知定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(1) = 0$, 若实数 x 满足 $xf\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 0$, 则 x 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ B. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$
C. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]$

二. 选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.)

9. 下列命题不正确的 ()

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0 \Rightarrow |a| > |b|$ B. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \Rightarrow a > b$
C. $\left. \begin{matrix} a^3 > b^3 \\ ab > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\left. \begin{matrix} a^2 > b^2 \\ ab > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

10. 关于函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, 正确的说法是 ()

- A. $f(x) = 0$ 有且仅有一个实根 B. $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 1\}$
C. $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增 D. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称

11. 若正实数 a, b 满足 $a+b=1$, 则下列说法正确的是 ()

- A. ab 有最大值 $\frac{1}{4}$ B. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$
C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最小值 4 D. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 1837 年, 德国数学家狄利克雷(P.G.Dirichlet, 1805-1859)第一个引入了现代函数概念: “如果对于 x 的每一个值, y 总有一个完全确定的值与之对应, 那么 y 是 x 的函数”. 由此引发了数学家们对函数性质的研究. 下面是以他的名字命名的“狄利克雷函数”:

$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q} \end{cases}$ (\mathbf{Q} 表示有理数集合), 关于此函数, 下列说法正确的是 ()

- A. $D(x)$ 是奇函数
B. $\forall x \in \mathbf{R}, D(D(x)) = 1$
C. 对于任意的有理数 t , 都有 $D(x+t) = D(x)$
D. 存在三个点 $A(x_1, D(x_1)), B(x_2, D(x_2)), C(x_3, D(x_3))$, 使 $\triangle ABC$ 为正三角形

三. 填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填写在答题卡相应位置上.)

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + mx, & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数, 则 $m =$ _____.

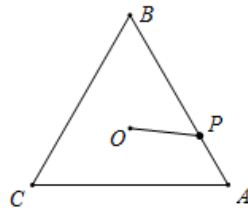
14. 函数 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ 的单调递减区间为 _____.

15. 设函数 $f(x) = ax^2 - 2x + c$, 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, 若对任意 $x \in [-1, 2], f(x) \leq m^2 - 4$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为 _____.

16. 如图, 在等边三角形 ABC 中, $AB=6$. 动点 P 从点 A 出发, 沿着此三角形三边逆时针运动回到 A 点, 记 P 运动的路程为 x , 点 P 到此三角形中心 O 距离的平方为 $f(x)$, 给出下列三个结论:

- ①函数 $f(x)$ 的最大值为 12;
- ②函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=9$;
- ③关于 x 的方程 $f(x) = kx + 3$ 最多有 5 个实数根.

其中, 所有正确结论的序号是 _____.



四. 解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 请将正确答案做在答题卷相应位置, 要有必要的推理或证明过程.)

17. (10 分) 已知关于 x 的不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$, $k \neq 0$

- (1) 若 $k = \frac{1}{8}$, 求不等式的解集;
- (2) 若不等式的解集为 R , 求 k 的取值范围.

18. (12 分) 已知正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

- (1) 求 $a+b$ 的最小值;
- (2) 求 $\frac{4a}{a-1} + \frac{9b}{b-1}$ 的最小值.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{mx^2-1}{x+n}$ 是奇函数, 且 $f(2) = \frac{3}{2}$.

(1) 求实数 m, n 的值;

(2) 用函数单调性的定义证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(3) 当 $x > 0$ 时, 解关于 x 的不等式: $f(x^2) > f(2x+3)$.

20. (12 分) 若函数 $y = f(x)$ 自变量的取值区间为 $[a, b]$ 时, 函数值的取值区间恰为 $\left[\frac{2}{b}, \frac{2}{a}\right]$, 就称区间 $[a, b]$ 为 $y = f(x)$ 的一个“和谐区间”. 已知函数 $g(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) = -x + 3$.

(1) 求 $g(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的“和谐区间”;

21. (12 分) 已知不等式 $\frac{ax-1}{x+1} > 0 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 解这个关于 x 的不等式;

(2) 若当 $x = -a$ 时不等式成立, 求 a 的取值范围.

22. (12 分) 给定函数 $f(x) = x^2 + x + a^2 + a, g(x) = x^2 - x + a^2 - a, a \in \mathbb{R}$. 且 $\forall x \in \mathbb{R}$, 用 $M(x)$ 表示 $f(x), g(x)$ 的较大者, 记为 $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

(1) 若 $a = 1$, 试写出 $M(x)$ 的解析式, 并求 $M(x)$ 的最小值;

(2) 若函数 $M(x)$ 的最小值为 3, 试求实数 a 的值.