

## 重庆八中高 2023 级高三（上）数学周考试题（五）

一、单项选择题：本题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合  $A = \{x | \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{x | \frac{5\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

则下列选项正确的是 ( )

- A.  $A \cap B = \emptyset$     B.  $A \subset B$     C.  $B \subset A$     D.  $A \cup B = \mathbb{R}$

2. “ $k > -2$ ” 是 “向量  $a = (k, 2)$  与向量  $b = (1, 1)$  夹角为锐角” 的 ( )

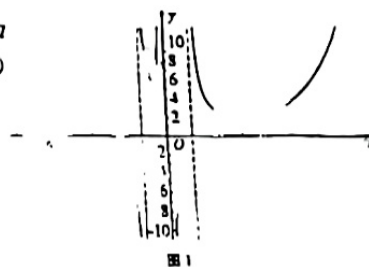
- A. 充要条件    B. 充分不必要条件    C. 必要不充分条件    D. 既不充分也不必要条件

3. 若  $a = 5^{0.1}$ ,  $b = \log_5 4$ ,  $c = \tan \frac{3\pi}{5}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( )

- A.  $a > b > c$     B.  $a > c > b$     C.  $c > a > b$     D.  $c > b > a$

4. 已知函数  $f(x)$  的图象如图 1 所示, 则  $f(x)$  的解析式可能为 ( )

- A.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2 \ln|x|}$     B.  $f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{x^2 \ln|x|}$   
C.  $f(x) = \frac{(e^x - e^{-x}) \ln|x|}{x}$     D.  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 \ln|x|}$



5. 疫情期间, 某医院召集 4 位医生, 1 位护士共 5 人赶赴 A, B, C 三个核酸检测点进行核酸检测工作, 每个检测点至少派 1 人, 且护士不去 A 检测点, 则不同的安排方法有 ( )

- A. 76    B. 88    C. 100    D. 124

6. 定义域为  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x)$  满足  $f(-x) = -f(x+4)$ . 当  $x > 2$  时,  $f(x)$  单调递增. 若  $(x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0$ ,  $f(x_1) + f(x_2) < 0$ , 则 ( )

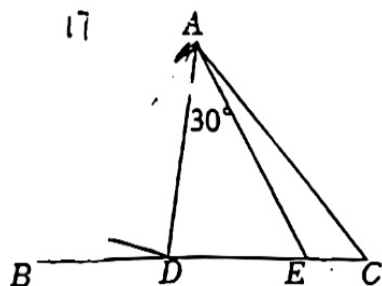
- A.  $x_1 + x_2 = 4$     B.  $x_1 + x_2 < 4$     C.  $x_1 + x_2 > 4$     D.  $x_1 + x_2$  的值与 4 的大小无确定

7. 已知  $\alpha, \beta$  为锐角, 且  $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 则  $\cos 2\beta =$  ( )

- A.  $\frac{3}{5}$     B.  $\frac{2}{3}$     C.  $\frac{4}{5}$     D.  $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

8. 如图, 正  $\triangle ABC$  中, 从点 A 连接对边 BC 上两点 D, E, 使  $\angle DAE = 30^\circ$ , 若  $BD = 16$ ,  $CE = 5$ , 则边长  $AB =$  ( )

- A. 38    B. 40    C. 42    D. 44



二、多项选择题：本题共 4 个小题，每小题 5 分。每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 在一个周期内的图象经过  $A(-\frac{5\pi}{18}, 0)$ ,  $B(-\frac{\pi}{9}, -1)$ ,  $C(\frac{\pi}{9}, 0)$ ,  $D(\frac{2\pi}{9}, 1)$  这四个点中的三个点，则 ( )

A.  $\varphi = -\frac{\pi}{6}$     B.  $\varphi = -\frac{\pi}{9}$     C.  $\omega = 2$     D.  $\omega = 3$

10. 已知向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 2$ ,  $\vec{b} = (2, 2)$  且  $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 6$ ，则下列结论正确的是 ( )

A.  $\vec{a} \perp \vec{b}$

B.  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{3}$

C.  $\vec{a} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  或  $\vec{a} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

D.  $\vec{a}$  与  $\vec{a} + 2\vec{b}$  的夹角为  $45^\circ$

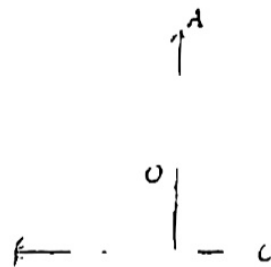
11. 锐角  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，外接圆  $O$  的半径  $R = \sqrt{3}$ ，点  $D$  在边  $BC$  上，且  $BD = 2DC = 2$ ，则下列判断正确的是 ( )

A.  $A = 60^\circ$

B.  $\triangle BOD$  为直角三角形

C.  $\triangle ABC$  周长的取值范围是  $(3, 9]$

D.  $AD$  的最大值为  $1 + \sqrt{3}$



12. 已知函数  $f(x) = 2\sin x - x\cos x - x$ ， $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数，下列命题正确的有 ( )

A.  $f(x) \leq x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  成立

B.  $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  成立

C.  $f'(x)$  在  $(0, \pi)$  上有两个零点

D. “ $a \leq 0$ ” 是 “ $f(x) \geq ax, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  成立” 的充要条件

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数  $f(x) = \left| \tan(2x - \frac{\pi}{6}) \right|$  的最小正周期是\_\_\_\_\_。

14. 函数  $g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 的值域为\_\_\_\_\_。

15.  $\vec{e}$  是单位向量，非零向量  $\vec{a}$  与  $\vec{e}$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ ， $\vec{b}^2 - 4\vec{e} \cdot \vec{b} + 3 = 0$ ，则  $|\vec{a} - \vec{b}|$  的最小值为\_\_\_\_\_。

16. 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ )， $C$  的上顶点为  $A$ ，两个焦点为  $F_1, F_2$ ，离心率为  $\frac{1}{2}$ 。过  $F_1$  且垂直于  $AF_2$  的直线与  $C$  交于  $D, E$  两点， $|DE| = 6$ ，则  $\triangle ADE$  的周长是\_\_\_\_\_。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，满足  $\cos C + \cos A \cos B = 2\sqrt{2} \sin A \cos B$ 。

(1) 求  $\cos B$  的值；

(2) 若  $a + c = 2$ ，求实数  $b$  的取值范围。

18. (12 分) 已知函数  $f(x) = A \cos x \sin(x - \frac{\pi}{6}) + 4 \sin^2 x - \frac{A}{4}$  的最大值为  $2 - \sqrt{3}$

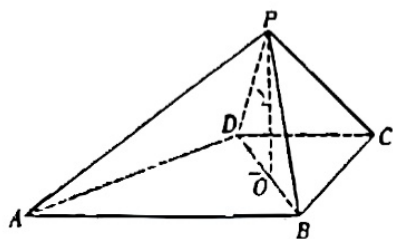
(1) 求  $A$  的值；

(2) 当  $x \in [0, \frac{3\pi}{4}]$  时，求  $y = f(x)$  的值域。

19. (12 分) 如图所示，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp BC$ ， $AB = 2BC = 2CD = 4$ ， $PB = PD$ ， $O$  为  $BD$  的中点，平面  $PBD \perp$  平面  $ABCD$ 。

(1) 证明： $AD \perp$  平面  $PBD$ ；

(2) 若  $PA \perp PC$ ，求平面  $PAD$  与平面  $PBC$  所成夹角的余弦值。



20. (12分) 为了让羽毛球运动在世界范围内更好的发展, 世界羽联将每年的7月5日定为“世界羽毛球日”. 在今年的“世界羽毛球日”里, 某主办方打算举办有关羽毛球的知识竞答比赛. 比赛规则如下: 比赛一共进行4轮, 每轮回答1道题, 第1轮奖金为100元, 第2轮奖金为200元, 第3轮奖金为300元, 第4轮奖金为400元. 每一轮答对则可以拿走该轮奖金, 答错则失去该轮奖金. 奖金采用累计制, 即参赛者最高可以拿到1000元奖金. 若累计答错2题, 则比赛结束且参赛者奖金清零. 此外, 参赛者在每一轮结束后都可主动选择停止作答、结束比赛并拿走已累计获得的所有奖金. 小陈同学去参加比赛, 每一轮答对题目的概率都是 $\frac{1}{3}$ , 并且小陈同学在没有损失

奖金风险时会一直选择继续作答, 在有损失奖金风险时选择继续作答的可能性为 $\frac{1}{2}$ .

(1) 求小陈同学前3轮比赛答对至少2题的概率;

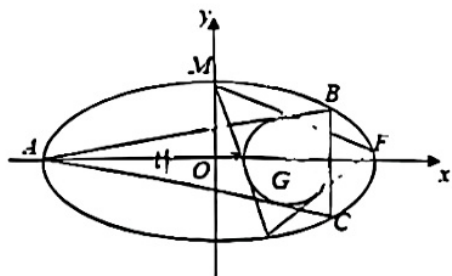
(2) 求小陈同学用参加比赛获得的奖金能够购买一只价值499元的羽毛球拍的概率.

21. (12分) 如图, 已知圆 $G: (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$ 是椭圆 $T: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 4)$ 的内接 $\triangle ABC$ 的内切圆,

其中 $A$ 为椭圆 $T$ 的左顶点, 且 $GA \perp BC$ .

(1) 求椭圆 $T$ 的标准方程;

(2) 过点 $M(0,1)$ 作圆 $G$ 的两条切线交椭圆于 $E, F$ 两点, 试判断直线 $EF$ 与圆 $G$ 的位置关系并说明理由.



22. (12分) 已知函数 $f(x) = x - \ln x - a (a \in \mathbb{R})$ .

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 当 $a > 1$ 时, 实数 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的小于1的零点.

求证: ①  $\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{x_0} + 1 < e^a$ ; ②  $\frac{x_0^2 + 1}{x_0} > 2a - \ln a$ .