

# 重庆八中 2022—2023 学年度（上）半期考试高一年级

## 数 学 试 题

命题：毛闰 唐鑫

审核：吉士钦

打印：唐鑫

校对：毛闰

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 > 2$ ”的否定是

- A.  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 \leq 2$     B.  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 < 2$     C.  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \leq 2$     D.  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 < 2$

2. 函数  $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{3-x}$  的定义域为

- A.  $[-1, +\infty)$     B.  $[-1, 3) \cup (3, +\infty)$     C.  $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$     D.  $[3, +\infty)$

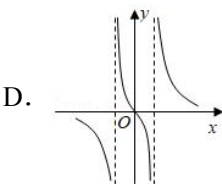
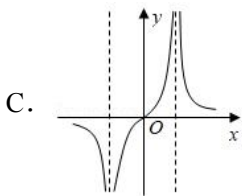
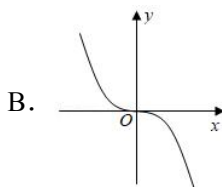
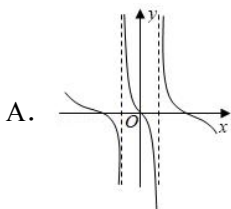
3. 设  $a \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > 2$ ”是“ $a^2 > 2a$ ”的

- A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件

4. 函数  $f(x)$  满足  $f(1-2x) = \frac{1}{x}$ ，则  $f(2) =$

- A. 2    B. -2    C.  $\frac{1}{2}$     D.  $-\frac{1}{2}$

5. 函数  $f(x) = \frac{3x}{x^2-2}$  的图象大致为



6. 新冠肺炎疫情防控中，核酸检测是新冠肺炎确诊的有效快捷手段。某医院在成为新冠肺炎核酸检测定点医院并开展检测工作的第  $n$  天，每个检测对象从接受检测到检测报告生成平均耗

时  $t(n)$ （单位：小时）大致服从的关系为  $t(n) = \begin{cases} \frac{t_0}{\sqrt{n}}, & n < N_0 \\ \frac{t_0}{\sqrt{N_0}}, & n \geq N_0 \end{cases}$  ( $t_0, N_0$  为常数)。已知第 16 天检测过程平均耗时为 10 小时，第 65 天和第 68 天检测过程平均耗时均为 5 小时，那么可得到第 49 天检测过程平均耗时约为

- A. 9 小时    B. 7 小时    C. 6 小时    D. 5 小时

7. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 9, & x \leq 1 \\ \frac{a}{x}, & x > 1 \end{cases}$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 则实数  $a$  的取值范围为

- A.  $[-5, 0)$       B.  $(-\infty, -2]$       C.  $[-5, -2]$       D.  $(-\infty, 0)$

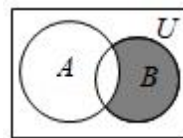
8. 若正实数  $x, y$  满足  $y - x > \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ , 则下列结论错误的是

- A.  $\frac{x}{y} < \frac{x+1}{y+1}$       B.  $\sqrt{x} + \frac{1}{y} < \sqrt{y} + \frac{1}{x}$       C.  $x|x-1| < y|y-1|$       D.  $\sqrt{x+1} < \sqrt{2y+1}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 图中矩形表示集合  $U$ ,  $A, B$  是  $U$  的两个子集, 则阴影部分可以表示为

- A.  $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$       B.  $(\complement_U A) \cap B$   
C.  $\complement_B(A \cap B)$       D.  $\complement_U(A \cap (\complement_U B))$



10. 若  $a > 0, b > 0$ , 且  $a + b = 3$ , 则下列结论正确的是

- A.  $a^2 + b^2 \geq \frac{9}{2}$       B.  $\sqrt{ab} \geq \frac{3}{2}$       C.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{6}$       D.  $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{8}{3}$

11. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 且在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 若  $f(1) = 0$ , 则下列说法正确的是

- A.  $\forall x \in \mathbf{R}, \exists M \in \mathbf{R}$ , 使  $f(x) \geq M$   
B. 若  $f(x-1) < f(3)$ , 则  $x \in (-\infty, 4)$   
C. 若  $xf(x) < 0$ , 则  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$   
D.  $f(x)$  的解析式可以为  $f(x) = x^2 + 2|x| - 3$

12. 我们知道, 函数  $y = f(x)$  的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数  $y = f(x)$  为奇函数. 有同学发现可以将其推广为: 函数  $y = f(x)$  的图象关于点  $P(a, b)$  成中心对称图形的充要条件是函数  $y = f(x+a) - b$  为奇函数. 现已知函数  $f(x) = ax + \frac{1}{x-1} + a$ , 则下列说法正

确的是

- A. 函数  $y = f(x+1) - 2a$  为奇函数  
B. 当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增  
C. 若方程  $f(x) = 0$  有实根, 则  $a \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

D. 设定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $g(x)$  关于  $(1, 1)$  中心对称, 若  $a = \frac{1}{2}$ , 且  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象共有 2022 个交点, 记为  $A_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 2022)$ , 则  $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_{2022} + y_{2022})$  的值为 4044

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 计算：  $27^{\frac{2}{3}} - (-\frac{7}{8})^0 + \sqrt[4]{(3-\pi)^4} + [(-2)^6]^{\frac{1}{2}} =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x)$  为奇函数，当  $x \geq 0$  时，  $f(x) = x^3 + \sqrt{x} + m - 2$ ，则  $f(f(-1)) =$  \_\_\_\_\_.

15. 写出一个同时具有下列性质①②的函数  $f(x)$ ：\_\_\_\_\_.

①函数  $f(x)$  对其定义域内的任意两个不等实数  $x_1, x_2$  都满足不等式  $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ；

②函数  $f(x)$  为偶函数.

16. 若存在常数  $k$  和  $b$ ，使得函数  $F(x)$  和  $G(x)$  分别对其定义域上的任意实数  $x$  都满足：  
 $F(x) \geq kx + b$  和  $G(x) \leq kx + b$  恒成立，则称此直线  $y = kx + b$  为  $F(x)$  和  $G(x)$  的“隔离直线”，

已知函数  $f(x) = 2x^2 - 3x (x \in \mathbf{R})$ ，  $g(x) = \frac{1}{x} (x < 0)$ ，若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  之间存在隔离直线  $y = -4x + b$ ，则实数  $b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知  $A = \{x | x^2 - 6x + 5 = 0\}$ ，  $B = \{x | ax - 1 = 0\}$ .

(1) 若  $a = 1$ ，求  $A \cap (\complement_{\mathbf{Z}} B)$ ；

(2) 从①  $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$ ；②  $A \cap B = B$ ；③  $B \cap (\complement_{\mathbf{R}} A) = \emptyset$  这三个条件中任选一个，补充在下面横线上，并进行解答.

问题：若\_\_\_\_\_，求实数  $a$  的所有取值构成的集合  $C$ .

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. (12 分)

已知幂函数  $f(x) = (m^2 - 5m + 7)x^{m-1}$ ，且  $f(x) = f(-x)$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式；

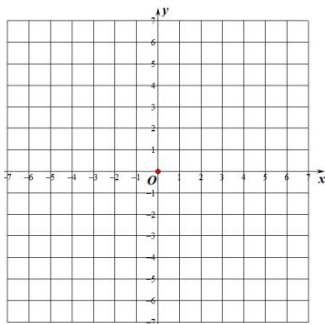
(2) 若  $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1}$ ， $a, b$  均为正数且  $g(a) + g(b) = 1$ ，求  $f(a) + f(b)$  的最小值.

19. (12 分)

已知函数  $f(x) = x - 1$ ，  $g(x) = x^2 - 4x + 3$ ， $\forall x \in \mathbf{R}$ ，用  $M(x)$  表示  $f(x)$ ， $g(x)$  中的较大者，记为  $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ .

(1) 写出函数  $M(x)$  的解析式，并画出它的图象；

(2) 当  $x \in [0, a]$  时，若函数  $M(x)$  的最小值为  $\frac{3}{2} - \frac{a}{2}$ ，求实数  $a$  的取值集合.



## 20. (12 分)

北京 2022 年冬奥会和冬残奥会，向世界传递了挑战自我、积极向上的体育精神，引导了健康、文明、快乐的生活方式。冬奥会吉祥物“冰墩墩”和冬残奥会吉祥物“雪容融”一亮相，好评不断，这是一次中国文化与奥林匹克精神的完美结合，是一次现代设计理念的传承与突破。

为了进一步宣传 2022 年北京冬奥会和冬残奥会，某赞助商开发了一款纪念产品，通过对这款产品的销售情况调查发现：该产品在过去的一个月内（以 30 天计）的日销售价格  $P(x)$ （单位：元）与时间  $x$ （单位：天）的函数关系近似满足  $P(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ，该商品的日销售量  $Q(x)$ （单位：个）与时间  $x$  部分数据如下表所示：

$x$ (天)	5	10	15	20	25	30
$Q(x)$ (个)	105	110	115	120	115	110

(1) 给出以下三种函数模型：①  $Q(x) = ax + b$ ，②  $Q(x) = a|x - 20| + b$ ，③  $Q(x) = \sqrt{ax + b} + c$ ，

请你根据上表中的数据，从中选择你认为最合适的一种函数模型来描述该商品的日销售量  $Q(x)$  与时间  $x$  的关系，并求出该函数的解析式；

(2) 求该商品的日销售总收入  $T(x)$  ( $1 \leq x \leq 30$ ,  $x \in \mathbf{N}^*$ ) (单位：元) 的最小值。

(注：日销售总收入 = 日销售价格  $\times$  日销售量)

## 21. (12 分)

设函数  $f(x)$  的定义域为  $(-4, 4)$ ，且满足：

$$f\left[\frac{16(x+y)}{16+xy}\right] = f(x) + f(y) + 2025f(0), \text{ 且当 } 0 < x < 4 \text{ 时, } f(x) > 0.$$

(1) 根据函数奇偶性和单调性的定义证明函数  $f(x)$  在定义域上的奇偶性和单调性；

(2) 求关于  $x$  不等式  $f(x+1) + f\left(\frac{x-3}{x}\right) \leq 0$  的解集。

## 22. (12 分)

已知函数  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x(2-x)}$ 。

(1) 证明：  $f^2(x) = 2 + 2g(x)$ ，并求函数  $f(x)$  的值域；

(2) 已知  $a$  为非零实数，记函数  $h(x) = f(x) - ag(x)$  的最大值为  $m(a)$ 。

①求  $m(a)$ ；②求满足  $m(a) = m\left(\frac{1}{a}\right)$  的所有实数  $a$ 。