

# 重庆八中高 2023 级高一（上）第一次月考

## 数 学 试 题

一、选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $M = \{0, 2\}$ ， $N = \{1, 2\}$ ，则  $M \cup N$  为

- A.  $\{0, 1\}$                       B.  $\{2\}$                       C.  $\{0, 1, 2\}$                       D.  $\{0\}$

2. 命题“ $\forall x \in R, x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ”的否定是

- A.  $\exists x \in R, x^2 - 2x + 1 \leq 0$                       B.  $\exists x \in R, x^2 - 2x + 1 \geq 0$   
 C.  $\exists x \in R, x^2 - 2x + 1 < 0$                       D.  $\forall x \in R, x^2 - 2x + 1 < 0$

3. 已知  $p: 2 < x \leq 3$ ， $q: 1 < x < 4$ ，则  $p$  是  $q$  的

- A. 充要条件                      B. 充分不必要条件  
 C. 必要不充分条件                      D. 既不充分也不必要条件

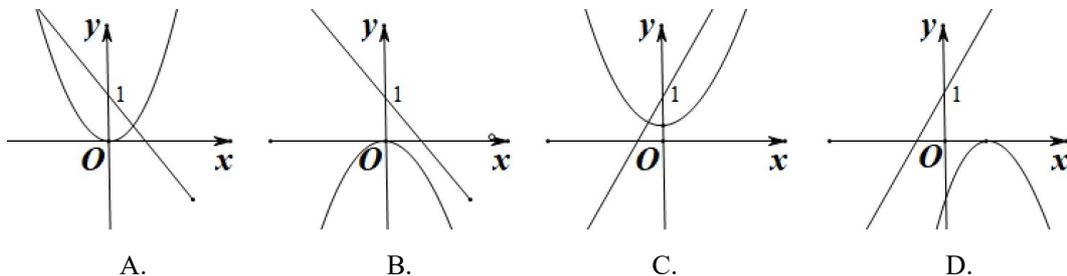
4. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & x \leq 0 \\ 3 - x, & x > 0 \end{cases}$ ，则  $f[f(5)] =$

- A. 0                      B. -2                      C. -1                      D. 1

5. 已知  $a > c$ ， $b > d$ ，则下列结论正确的是

- A.  $(a+b)^2 > (c+d)^2$                       B.  $(a-c)(d-b) < 0$   
 C.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{c}$                       D.  $a-b > c-d$

6. 函数  $y = -ax + 1$  与  $y = ax^2$  在同一坐标系中的图象大致是图中的



7. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 8, & x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$ ， $f(x)$  在定义域上单调递减，则实数  $a$  的范围为

- A.  $(1, \frac{7}{2})$                       B.  $(1, +\infty)$                       C.  $[1, \frac{7}{2}]$                       D.  $(-\infty, \frac{7}{2}]$

8. 关于  $x$  的一元二次不等式  $mx^2 - 2x + 1 < 0$  的解集为  $(a, b)$ , 则  $3a + 2b$  的最小值是

- A.  $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$       B.  $5+2\sqrt{6}$       C.  $\frac{5}{2}+\sqrt{6}$       D. 3

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9. 下列各组函数是同一函数的是

- A.  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  与  $g(s) = s^2 - 2s - 1$       B.  $f(x) = \sqrt{-x^3}$  与  $g(x) = x\sqrt{-x}$   
C.  $f(x) = \frac{x}{x}$  与  $g(x) = \frac{1}{x^0}$       D.  $f(x) = x$  与  $g(x) = \sqrt{x^2}$

10. 下列函数中值域为  $R$  的有

- A.  $f(x) = 3x - 1$       B.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$   
C.  $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$       D.  $f(x) = x^3 - 1$

11. 若正实数  $a, b$  满足  $a + b = 1$ , 则下列说法正确的是

- A.  $ab$  有最大值  $\frac{1}{4}$       B.  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  有最大值  $\sqrt{2}$   
C.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  有最小值 2      D.  $a^2 + b^2$  有最大值  $\frac{1}{2}$

12. 定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 当  $x < 0$  时,  $f(x) > 0$ , 则函数  $f(x)$  满足

- A.  $f(0) = 0$       B.  $y = f(x)$  是增函数  
C.  $f(x)$  在  $[m, n]$  上有最大值  $f(n)$       D.  $f(x-1) > 0$  的解集为  $(-\infty, 1)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数  $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2x-1}$  的定义域为\_\_\_\_\_

14. 函数  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$  的单调递增区间是\_\_\_\_\_

15. 已知定义域为  $R$  的  $f(x)$  为减函数, 若不等式  $f(1-ax) > f(2+x^2)$  对任意的  $x \in R$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_

16. 重庆某车间分批生产某种产品, 每批的生产准备费用为 800 元, 若每批生产  $x$  件, 则平均仓储时间为  $\frac{x}{8}$  天, 且每件产品每天的仓储费用为 1 元, 为使平均到每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小, 每批应生产产品\_\_\_\_\_件

四. 解答题：共 70 分. 解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知集合  $A = \{x \mid x^2 + x - 2 < 0\}$ , 集合  $B = \{x \mid |x - 1| < 2\}$ .

求: (1)  $A \cup B$ ; (2)  $A \cap (C_R B)$ .

18. (12 分) 已知关于  $x$  的不等式  $x^2 + mx + 3 < 0$  的解集为  $\{x \mid n < x < 3\}$

(1) 求  $m, n$  的值;

(2) 解关于  $x$  的不等式  $\frac{nx - m}{x - 2} \leq x$ .

19. (12 分) 已知命题  $p: \forall x \in [-1, 1], x^2 - x + m < 0$  是真命题.

(1) 求实数  $m$  的取值集合  $A$ ;

(2) 设  $(x - 2a)(x - a - 1) < 0$  的解集为  $B$ , 若  $x \in B$  是  $x \in A$  的充分不必要条件, 求实数  $a$  的取值范围.

20. (12 分) 今年的新冠肺炎疫情是 21 世纪以来规模最大的突发公共卫生事件, 疫情早期, 武汉成为疫情重灾区, 据了解, 为了最大限度保障人民群众的生命安全, 现需要按照要求建造隔离病房和药物仓库. 已知建造隔离病房的所有费用  $w$  (万元) 和病房与药物仓库的距离  $x$  (千米) 的关系为:  $w = \frac{k}{3x + 5}$  ( $0 < x \leq 8$ ). 若距离为 1 千米时, 隔离病房建造费用为 100 万元. 为了方便, 隔离病房与药物仓库之间还需修建一条道路, 已知购置修路设备需 5 万元, 铺设路面每公里成本为 6 万元, 设  $f(x)$  为建造病房与修路费用之和.

(1) 求  $f(x)$  的表达式;

(2) 当隔离病房与药物仓库距离多远时, 可使得总费用  $f(x)$  最小? 并求出最小值.

21. (12分) 已知  $f(x) = x^2 - 2ax + 3$

(1) 若函数  $g(x) = f(x) - x$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递减, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 当  $x \in [0, 2]$ , 求  $f(x)$  的最小值  $h(a)$ .

22. (12分) 对于定义域为  $I$  的函数, 如果存在区间  $[m, n] \subseteq I$ , 同时满足下列两个条件:

①  $f(x)$  在区间  $[m, n]$  上是单调的;

② 当定义域是  $[m, n]$  时,  $f(x)$  的值域也是  $[m, n]$ . 则称  $[m, n]$  是函数  $y = f(x)$  的一个“黄金区间”.

(1) 请证明: 函数  $y = 1 - \frac{1}{x} (x > 0)$  不存在“黄金区间”.

(2) 已知函数  $y = x^2 - 4x + 6$  在  $R$  上存在“黄金区间”, 请求出它的“黄金区间”.

(3) 如果  $[m, n]$  是函数  $y = \frac{(a^2 + a)x - 1}{a^2 x} (a \neq 0)$  的一个“黄金区间”, 请求出  $n - m$  的最大值.