重庆八中高2024级高一（上）阶段检测（1）

数学试题

命题：张丽君 吉士钦 审核：吉士钦 打印：张丽君 校对：张丽君

一、单项选择题：共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题列出的的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．已知集合 $M=\{0,2\}$，$N=\{1,2\}$，则 $M\cup N$ 为

A．$\{0,1\}$　　B．$\{2\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{0\}$

2．命题"$\forall x\in R$，$x^2-2x+1\geqslant 0$"的否定是

A．$\exists x\in R$，$x^2-2x+1\leqslant 0$　　B．$\exists x\in R$，$x^2-2x+1\geqslant 0$

C．$\exists x\in R$，$x^2-2x+1<0$　　D．$\forall x\in R$，$x^2-2x+1<0$

3．已知 $p:2<x\le 3$，$q:1<x<4$，则 p 是 q 的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3, x\leqslant 0\\ 3-x, x>0\end{cases}$，则 $f\left[f(5)\right]=$

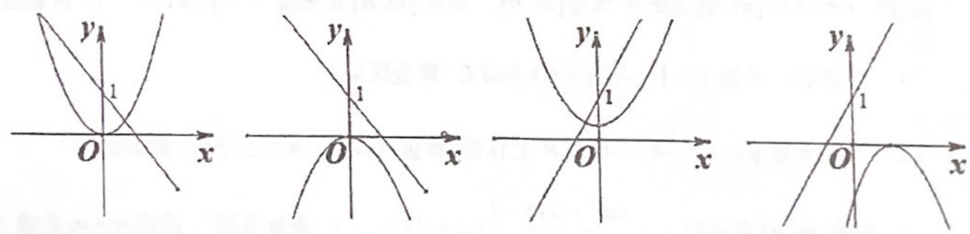
A．0　　B．-2　　C．-1　　D．1

5．已知 $a>c$，$b>d$，则下列结论正确的是

A．$(a+b)^2>(c+d)^2$　　B．$(a-c)(d-b)<0$

C．$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{c}$　　D．$a-b>c-d$

6．函数 $y=-ax+1$ 与 $y=ax^2$ 在同一坐标系中的图象大致是图中的



A.　　B.　　C.　　D.

7．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+8, x\leqslant 1\\ \dfrac{2}{x}, x>1\end{cases}$，$f(x)$ 在定义域上单调递减，则实数 a 的范围为

A．$(1,\dfrac{7}{2})$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$\left[1,\dfrac{7}{2}\right]$　　D．$(-\infty,\dfrac{7}{2}]$

8．关于 x 的一元二次不等式 $mx^2-2x+1<0$ 的解集为 (a,b)，则 $3a+2b$ 的最小值是

A．$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$　　B．$5+2\sqrt{6}$　　C．$\dfrac{5}{2}+\sqrt{6}$　　D．3

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．下列各组函数是同一函数的是

A．$f(x)=x^2-2x-1$ 与 $g(s)=s^2-2s-1$　　B．$f(x)=\sqrt{-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt{-x}$

C．$f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x^0}$　　D．$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

10．若定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$，对任意的 $x_1,x_2\in R$，当 $x_1\neq x_2$，都有 $(x_1-x_2)\left[f(x_1)-f(x_2)\right]>0$，则下列说法正确的是

A．$f\left(1\right)<f\left(5\right)$　　B．$f\left(2a\right)<f\left(a^2+2\right)$

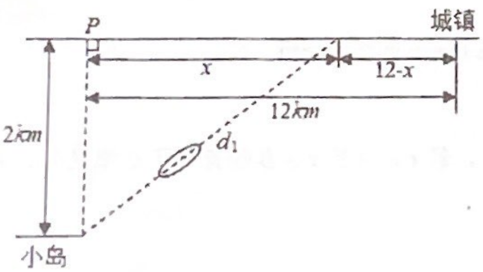
C．$f(x)$ 在 $[m，n]$ 上有最大值 $f(m)$　　D．$f(a^2)<f(a+6)$ 的解集为 $(-2,3)$

11．若正实数 a，b 满足 $a+b=1$，则下列说法正确的是

A．ab 有最大值 $\dfrac{1}{4}$　　B．$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$

C．$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 有最小值 2　　D．a^2+b^2 有最大值 $\dfrac{1}{2}$

12. 如图所示，一座小岛距离海岸线上最近的 P 点的距离是 $2km$，从 P 点沿海岸正东 $12km$ 处有一个城镇. 假设一个人驾驶的小船的平均速度为 $3km/h$，步行的速度为 $5km/h$，时间 t（单位：h）表示他从小岛到城镇的时间，x（单位：km）表示此人将船停在海岸处距 P 点的距离. 设 $u=\sqrt{x^2+4}+x$，$v=\sqrt{x^2+4}-x$，则



A．当 $x=4$ 时，此人从小岛到城镇花费的时间超过 $3h$

B．$15t-u-4v=24$

C．函数 $v=f(u)$ 为减函数

D．当 $x=1.5$ 时，此人从小岛到城镇花费的时间最少

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f(x)=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{2x-1}$ 的定义域为________.

14. 若函数 $f\left(x\right)=\dfrac{a}{x-1}$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为________.

15. 某班共 40 人，其中 20 人喜欢篮球运动，15 人喜欢乒乓球运动，8 人对这两项运动都不喜欢，则喜欢篮球运动但不喜欢乒乓球运动的人数为________.

16. 重庆某车间分批生产某种产品，每批的生产准备费用为 800 元，若每批生产 x 件，则平均仓储时间为 $\dfrac{x}{8}$ 天，且每件产品每天的仓储费用为 1 元，为使平均到每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小，每批应生产产品__________件.

四. 解答题：共 70 分. 解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）已知集合 $A=\left\{x\mid x^2+x-2<0\right\}$，集合 $B=\left\{x\middle|\left|x-1\right|<2\right\}$. 求：

（1）$A\cup B$；（2）$A\cap\left(\complement_U B\right)$.

18.（12 分）已知关于 x 的不等式 $x^2+mx+3<0$ 的解集为 $\left\{x\middle|n<x<3\right\}$.

（1）求 m,n 的值；

（2）解关于 x 的不等式 $\dfrac{nx-m}{x-2}\le x$.

19.（12 分）已知命题 $p:\forall x\in R$，$x^2-x+m>0$ 是真命题.

（1）求实数 m 的取值集合 A；

（2）设 $(x-2a)(x-a-1)>0$ 的解集为 B，若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围.

20.（12 分）新冠肺炎疫情是 21 世纪以来规模最大的突发公共卫生事件，疫情早期，武汉成为疫情重灾区，据了解，为了最大限度保障人民群众的生命安全，现需要按照要求建造隔离病房和药物仓库.已知建造隔离病房的所有费用 w（万元）和病房与药物仓库的距离 x（千米）的关系为：$w=\dfrac{k}{3x+5}$（$0<x\le 8$）.若距离为 1 千米时，隔离病房建造费用为 100 万元.为了方便，隔离病房与药物仓库之间还需修建一条道路，已知购置修路设备需 5 万元，铺设路面每公里成本为 6 万元，设 $f(x)$ 为建造病房与修路费用之和.

（1）求 $f(x)$ 的表达式；

（2）当隔离病房与药物仓库距离多远时，可使得总费用 $f(x)$ 最小？并求出最小值.

21.（12 分）设函数 $f(x)=x+a\sqrt{1-x}(a\in R)$.

（1）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的值域；

（2）若不等式 $f(x)\le 2$ 对 $x\in[-8,-3]$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

22.（12 分）对于定义域为 I 的函数，如果存在区间 $[m,n]\subseteq I$，同时满足下列两个条件：

① $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上是单调的；

② $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上的值域是 $[m,n]$．则称 $[m,n]$ 是函数 $y=f(x)$ 的一个“黄金区间”.

（1）请证明：函数 $y=1-\dfrac{1}{x}(x>0)$ 不存在“黄金区间”；

（2）已知函数 $y=x^2-4x+6$ 在 R 上存在“黄金区间”，请求出它的“黄金区间”；

（3）如果 $[m,n]$ 是函数 $y=\dfrac{(a^2+a)x-1}{a^2x}(a\ne 0)$ 的一个“黄金区间”，请求 $n-m$ 的最大值.

重庆八中高2024级高一（上）阶段检测（1）数学参考答案

一.选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	C	B	C	B	A	C	C	AC	ABD	AB	ACD

二.填空题

13. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right]$　14. $(-\infty,0)$　15. 17　16. 80

三.解答题

17.解：（1）由题意得：$A=\{x\,|\,(x+2)(x-1)<0\}$，解得$A=(-2,1)$，且$B=(-1,3)$，故$A\cup B=(-2,3)$ ……5 分

（2）$C_RB=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$，故$A\cap(C_RB)=(-2,-1]$ ……………10 分

18.解：（1）由题意得：$x_1=3,x_2=n$是方程$x^2+mx+3=0$的两个根，

将$x_1=3$代入方程得$9+3m+3=0,\therefore m=-4$，……………3 分

将$x_2=n$代入方程得$n^2-4n+3=0,\therefore n=1$或$3$(舍)，……………6 分

综上$m=-4,n=1$

（2）$\frac{x+4}{x-2}\le x\Rightarrow\frac{-x^2+3x+4}{x-2}\le 0\Rightarrow\begin{cases}(x-4)(x+1)(x-2)\ge 0\\x-2\ne 0\end{cases}$，……………9 分

$\therefore$解集为$[-1,2)\cup[4,+\infty)$ ……………12 分

19.解：（1）由题意得：$\forall x\in R$,有$m>x-x^2$恒成立，令$g(x)=x-x^2$，……………2 分

则$m>g(x)_{\max},x\in R$，……………4 分 所以$g(x)_{\max}=g(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，$\therefore m>\frac{1}{4}.\therefore A=(\frac{1}{4},+\infty)$ ……………6 分

（2）由题意得：$A\subseteq B$且$A\ne B$，由（1）得$A=(\frac{1}{4},+\infty)$，

①$a=1$时，$B=\{x|x\ne 2\}$，不满足题意；……………8 分

②$a>1$时，此时$2a>a+1$，则$B=(-\infty,a+1)\cup(2a,+\infty)$，$\therefore 2a\le\frac{1}{4}$，无解；……………10 分

③$a<1$时，此时$2a<a+1$，则$B=(-\infty,2a)\cup(a+1,+\infty)$，$\therefore a+1\le\frac{1}{4},a\le-\frac{3}{4}$；……………12 分

综上，$a\le-\frac{3}{4}$.

20.解：（1）当$x=1$时，$100=\frac{k}{3+5}$，$\therefore k=800,\therefore w=\frac{800}{3x+5}$ ……………2 分

$\therefore f(x)=\frac{800}{3x+5}+6x+5$，$(0<x\le 8)$ ……………5 分

（2）$f(x)=\frac{800}{3x+5}+6x+5=\frac{800}{3x+5}+2(3x+5)-5\ge 2\sqrt{\frac{800}{3x+5}\cdot 2(3x+5)}-5=75$ ……9 分

当且仅当$\frac{800}{3x+5}=2(3x+5)$即$x=5$时，总费用最小为75万元。……………………12 分

21.解：（1）$a=1$时，$f(x)=x+\sqrt{1-x}$，$(x\leqslant 1)$，令$t=\sqrt{1-x}$，则$t\geqslant 0$，$x=1-t^2$，

$\therefore y=1-t^2+t=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$，$\because t\geqslant 0$，$\therefore y\leqslant\frac{5}{4}$，函数$f(x)$的值域是$(-\infty，\frac{5}{4}]$．

（2）令$t=\sqrt{1-x}$，$x\in[-8，-3]$，则$x=1-t^2$，$2\leqslant t\leqslant 3$，

则$y=1-t^2+at$，若不等式$f(x)\leqslant 2$对$x\in[-8，-3]$恒成立，则等价为$1-t^2+at\leqslant 2$对$t\in[2，3]$恒成立，

即$a\leqslant t+\frac{1}{t}$对$t\in[2，3]$恒成立，令$g(t)=t+\frac{1}{t}$，$t\in[2，3]$，则函数$g(t)$在$[2，3]$上是一个增函数，

$\therefore g(t)$的最小值为$g(2)=\frac{5}{2}$，$\therefore a\leqslant\frac{5}{2}$，即$a$的取值范围为$(-\infty，\frac{5}{2}]$．

22.解：（1）证明：由$y=1-\frac{1}{x}$为$(0,+\infty)$上的增函数，则有$\begin{cases}f(m)=m\\f(n)=n\end{cases}$，…………1分

$\therefore 1-\frac{1}{x}=x\Leftrightarrow x^2-x+1=0$，无解，$\therefore y=1-\frac{1}{x}(x>0)$不存在“黄金区间”……3分

（2）记$[m,n]$是函数$y=x^2-4x+6$的一个“黄金区间”$(m<n)$，

由$y=(x-2)^2+2\geq 2$及此时函数值域为$[m,n]$，可知$m\geq 2$…………………………4分

而其图象对称轴为$x=2$，$\therefore y=x^2-4x+6$在$[m,n]$上必为增函数……………………5分

令$x^2-4x+6=x$，$\therefore x^2-5x+6=0$，$\therefore x_1=2,x_2=3$

故该函数有唯一一个“黄金区间”$[2,3]$…………………………………………………7分

（3）由$f(x)=\frac{(a^2+a)x-1}{a^2x}=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上均为增函数，已知$f(x)$在“黄金区间”$[m,n]$上单调，所以$[m,n]\subseteq(-\infty,0)$或$[m,n]\subseteq(0,+\infty)$，且$f(x)$在$[m,n]$上为单调递增，则同理可得$f(m)=m$，$f(n)=n$，即$m,n(m<n)$是方程$\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}=x$的两个同号的实数根，等价于方程$a^2x^2-(a^2+a)x+1=0$有两个同号的实数根，注意到$mn=\frac{1}{a^2}>0$，则只要$\Delta=(a^2+a)^2-4a^2>0$，$\therefore a>1$或$a<-3$，………9分

而由韦达定理知$n+m=\frac{a^2+a}{a^2}=\frac{a+1}{a}$，$mn=\frac{1}{a^2}$，

所以$n-m=\sqrt{(n+m)^2-4mn}=\sqrt{(\frac{a+1}{a})^2-\frac{4}{a^2}}=\sqrt{-\frac{3}{a^2}+\frac{2}{a}+1}=\sqrt{-3(\frac{1}{a}-\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}}$，其中$a>1$或$a<-3$，所以当$a=3$时，$n-m$取得最大值$\frac{2\sqrt{3}}{3}$．……………………12分