

重庆八中 2021—2022 学年度（上）期末考试高一年级-参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	A	D	C	D	A	B	AD	ABD	ABC	BC

13.3 14. $6\pi - 4\sqrt{2}$ 15. $\frac{5}{7}$ 16. $\frac{1}{9}$

8.解: $(ax-1)^2 < x^2$ 恰有 2 个整数解, 即 $[(a+1)x-1][(a-1)x-1] < 0$ 恰有 2 个整数解, 所以 $(a+1)(a-1) > 0$, 解得 $a > 1$ 或 $a < -1$,

①当 $a > 1$ 时, 不等式解集为 $\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a-1}\right)$, 因为 $\frac{1}{a+1} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 故 2 个整数解为 1 和 2,

则 $2 < \frac{1}{a-1} \leq 3$, 即 $2a-2 < 1 \leq 3a-3$, 解得 $\frac{4}{3} \leq a < \frac{3}{2}$;

②当 $a < -1$ 时, 不等式解集为 $\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a-1}\right)$, 因为 $\frac{1}{a-1} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 故 2 个整数解为 -1, -2

则 $-3 \leq \frac{1}{a+1} < -2$, 即 $-2(a+1) < 1 \leq -3(a+1)$, 解得 $-\frac{3}{2} < a \leq -\frac{4}{3}$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $-\frac{3}{2} < a \leq -\frac{4}{3}$ 或 $\frac{4}{3} \leq a < \frac{3}{2}$.

16.解: $12 = x + y + 2xy \geq 2\sqrt{xy} + 2xy \Rightarrow xy + \sqrt{xy} \leq 6$, 当 $x = y = 2$ 时取等, 所以

$0 < \sqrt{xy} \leq 2 \Rightarrow xy \in (0, 4]$, $t = xy + 1$, 则 $t \in (1, 5]$,

$$\frac{xy+1}{x^2y^2+3xy+18} = \frac{t}{(t-1)^2+3(t-1)+18} = \frac{t}{t^2+t+16} = \frac{t}{t+\frac{16}{t}+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{t \cdot \frac{16}{t}}+1} = \frac{1}{9},$$

当 $t = 4$ 时取等.

17. 解: (1)
$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot 3\sin(-\pi - \alpha) \cdot \tan(-\alpha)}{2\cos\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos(5\pi - \alpha) \cdot \tan(3\pi - \alpha)} = \frac{\cos \alpha \cdot 3\sin \alpha \cdot (-\tan \alpha)}{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-\tan \alpha)} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 原式 = $\frac{2}{3} + 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} + 2^2 \times 3^3 - \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{3} = \frac{2}{3} + 2 + 108 - \frac{2}{3} + \sqrt{3} = 110 + \sqrt{3} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

18.解: (1) $\sin \alpha = 2(1 - 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}) = -2\cos \alpha$, $\therefore \tan \alpha = -2$ 2 分

$\therefore \alpha$ 在第二象限, $\therefore \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$,4 分

$\therefore \cos 2\alpha + \sin \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 + \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}-3}{5}$ 6 分

(2) $3\tan^2 \beta + 2\tan \beta - 3 = 0 \Rightarrow 2\tan \beta = 3(1 - \tan^2 \beta) \Rightarrow \frac{2\tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = 3$ 9 分

$\therefore \tan 2\beta = 3$, $\tan(\alpha + 2\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan \alpha \tan 2\beta} = \frac{-2+3}{1+2 \times 3} = \frac{1}{7}$ 12 分

19. 解: (1) $W(x) = x \cdot f(x) - 100x - 60$, $\therefore W(x) = \begin{cases} -2x^2 + 80x - 60, 0 < x \leq 18 \\ -30x - \frac{27000}{x} + 2590, 18 < x \leq 32 \end{cases}$ 4 分

(2) 当 $0 < x \leq 18$ 时, $W(x) = -2x^2 + 80x - 50 = -2(x - 20)^2 + 740$,6 分

在 $(0, 18]$ 上单调递增 $\therefore x = 18$ 时, $W(x)$ 取最大值 $W(x)_{\max} = -2 \times 4 + 740 = 732$,8 分

当 $x > 18$ 时, $W(x) = 2590 - 30x - \frac{27000}{x} = 2590 - 30(x + \frac{900}{x})$,10 分

\therefore 当 $x = 30$ 时, $W(x)_{\max} = 790$,

综上, 当年产量为 30 万台时, 该公司获得最大利润, 最大利润为 790 万元.12 分

20. 解：（1）由题意可知， $f(0) = \frac{-2}{a+1} + 1 = 0$ ，解得 $a = 1$ ，则 $f(x) = \frac{2^x - 3}{2^x + 1} + 1$ ，

经检验， $f(-x) = -f(x)$ 恒成立. 令 $2^x = t (t > 0)$ ，则 $y = \frac{t-3}{t+1} + 1 = 2 - \frac{4}{t+1}$ ，

\therefore 函数在 $(0, +\infty)$ 单调递增， \therefore 函数的值域为 $(-2, 2)$ 5 分

（2）由（1）得 $f(x) + 2 > 0$ ，则

$$f(x) + \frac{6}{f(x)+2} \leq 5 \Leftrightarrow f^2(x) - 3f(x) - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (f(x) - 4)(f(x) + 1) \leq 0, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore -1 \leq f(x) < 2 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore -1 \leq \frac{2^x - 3}{2^x + 1} + 1 < 2 \Leftrightarrow x \geq \log_2 \frac{1}{3}, \therefore \text{不等式得解集为 } [\log_2 \frac{1}{3}, +\infty) \dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解：（1）由题图知 $A = 2$ ， $T = \pi$ ，于是 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，将 $y = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得 $y = 2\sin(2x + \varphi)$ 的图象. 于是 $\varphi = 2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \therefore f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 5 分

（2）由题意得 $g(x) = 2\sin[2(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{6}] = -2\cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 7 分

$$\text{故 } y = f(x) + g(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{12})$$

$$\text{由 } 2\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{12}) = \sqrt{6}, \text{ 得 } \sin(2x - \frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because 0 < x < \frac{3}{2}\pi \therefore -\frac{\pi}{12} < 2x - \frac{\pi}{12} < 3\pi - \frac{\pi}{12}$$

$$\therefore x = \frac{5\pi}{24} \text{ 或 } x = \frac{3\pi}{8} \text{ 或 } x = \frac{29\pi}{24} \text{ 或 } x = \frac{11\pi}{8}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{横坐标之和为 } \frac{19\pi}{6} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22.解: (1) 解: (1) $f(ax) = \ln\left(\frac{ax+1}{ax-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{ax-1} + 1\right)$

$\therefore f(ax)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, $\therefore y = \frac{2}{ax-1} + 1$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 且 $\frac{2}{ax-1} + 1 > 0$

$$\therefore \begin{cases} a < 0 \\ \frac{2}{a-1} + 1 \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a \leq -1 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 化简 $f(2^x) = \ln \frac{2^x+1}{2^x-1} (x > 0)$, 得 $f(2^x) = \ln\left(\frac{2}{2^x-1} + 1\right)$, 它在定义域 $(0, +\infty)$ 上是减

函数. 所以, 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上的值域为 $[f(x_2), f(x_1)]$,

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{2^{x_1}+1}{2^{x_1}-1} = \frac{2}{t \cdot 2^{x_1+1}-t}, \\ \frac{2^{x_2}+1}{2^{x_2}-1} = \frac{2}{t \cdot 2^{x_2+1}-t}, \end{cases} \text{ 整理, 得, } \begin{cases} 2t(2^{x_1})^2 + (t-2)2^{x_1} + (2-t) = 0, \\ 2t(2^{x_2})^2 + (t-2)2^{x_2} + (2-t) = 0, \end{cases}$$

即方程 $2t \cdot (2^x)^2 + (t-2) \cdot 2^x + (2-t) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有两不等实根 $x_1, x_2 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

令 $2^x = u$, 当 $x > 0$ 时, $u > 1$,

则关于 u 的方程 $2t \cdot u^2 + (t-2) \cdot u + (2-t) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有两个不等实根.

整理得, $\frac{1}{t} = \frac{2u^2+u-1}{2u-2} = u-1 + \frac{1}{u-1} + \frac{5}{2}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$y = \frac{1}{t}$ 与 $y = u-1 + \frac{1}{u-1} + \frac{5}{2}$ 由两个不同的交点,

$\therefore t \in (0, \frac{2}{9}) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$