

数学试题

(满分: 150 分; 考试时间: 120 分钟)

2021 年 10 月

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔填涂; 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写; 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持答卷清洁、完整。
3. 考试结束后, 将答题卡交回 (试题卷自行保管, 以备评讲)。

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $P = \{x | x^2 - x - 2 \geq 0\}$, $Q = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 则 $(C_U P) \cap Q = (\quad)$
 A. $\{-1, 0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
2. 已知命题 $p: \forall x > 0, x^2 + 1 \geq 1$, 则 $\neg p$ 为 (\quad)
 A. $\exists x \leq 0, x^2 + 1 < 1$ B. $\exists x \leq 0, x^2 + 1 \geq 1$ C. $\exists x > 0, x^2 + 1 < 1$ D. $\exists x < 0, x^2 + 1 \leq 1$
3. 下列函数中, 值域为 $(0, +\infty)$ 的是 (\quad)
 A. $y = \sqrt{x-1}$ B. $y = \frac{1}{x-1}$ C. $y = x^2$ D. $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$
4. “ $|m| \neq 2$ ” 是 “ $m \neq 2$ ” 的 (\quad)
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 集合 $M = \{x | x = 3k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$, $P = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$, $S = \{x | x = 6m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$ 之间的关系是 (\quad)
 A. $S = P \subsetneq M$ B. $S \subsetneq P \subsetneq M$ C. $S \subsetneq P = M$ D. $P = M \subsetneq S$
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ -x+1, & x \geq 1 \end{cases}$, 对任意实数 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 都满足 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$, 则实数 a 的取值范围是 (\quad)
 A. $\left[\frac{1}{7}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ D. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

7. 给定函数 $f(x) = \frac{x}{2}$, $g(x) = -x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$. 用 $m(x)$ 表示 $f(x)$, $g(x)$ 中的较小者, 记为 $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, 则 $m(x)$ 的最大值为 ()
- A. $\frac{1}{4}$ B. 1 C. 0

8. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + 2b = 1$, 则 $\frac{b^2 + a + 1}{ab}$ 的最小值为 ()

- A. $4 + \sqrt{10}$ B. $4 + 2\sqrt{10}$ C. $6 + \sqrt{10}$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 在下列四组函数中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是 ()

A. $f(x) = x - 1$, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

B. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$

C. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

D. $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-3)}$, $g(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-3}$

10. 下列 a 的取值中 能使函数 $f(x) = ax^2 - 2x - 3$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上单调递减的是 ()

- A. $a \in (1, +\infty)$ B. $a = 0$ C. $a \in (-\infty, 1]$ D. $a \in [0, 1]$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & (x \geq 1) \\ f(x+1) & (x < 1) \end{cases}$ $g(x) = 4x^2 + 2x$, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(g(0)) = \frac{1}{2}$

B. $g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{4}$

C. $f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递增

D. $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 三边长分别为 a , b , c , 且 $abc = 4$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a^2b < 4 + ab^2$ B. $ab + a + b > 4$ C. $a + b^2 + c^2 > 4$ D. $a + b + c < 4$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $f(2x-1)=4x+2$ ，则 $f(0)=$ _____.
14. 若“ $\exists x \in R, x^2+2kx+2 < 0$ ”为假命题，则 k 的取值范围为_____.
15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 (a, b) ，其中 $b > a+2$ ，则 $F(x)=f(2x-1)+f(2x+1)$ 的定义域是_____.
16. 若关于 x 的不等式 $-1 < ax^2+bx+c < 1$ 解集为 $(-1, 3)$ ，则正实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x+1}{2-x} \geq 0 \right\}$ ，函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ 的定义域为集合 B .
- (1) 求 $A \cup B, (C_R A) \cap (C_R B)$;
- (2) 若 $M = \{x \mid x \leq m\}$ ，且 $M \cup B = R$ ，求实数 m 的取值范围.
18. 设不等式 $|2x-5| \leq 3$ 的解集为 A ，关于 x 的不等式 $x^2-(a+2)x+2a \leq 0 (a \in R)$ 的解集为 B .
- (1) 求集合 A, B ;
- (2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.
19. 一个工厂生产某种产品每年需要固定投资 100 万元，此外，每生产 1 件该产品还需要增加投资 1 万元，年产量 $x (x \in N^*)$ 件，当 $x \leq 20$ 时，年销售总收入为 $(33x-x^2)$ 万元；当 $x > 20$ 时，年销售总收入为 260 万元，记该工厂生产并销售这种产品所得的年利润为 y 万元（年利润=年销售总收入-一年总投入）.
- (1) 求 y （万元）与 x （件）的函数关系式；
- (2) 当该工厂的年产量为多少时，所得年利润最大？最大年利润是多少？

20. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$, $f(2)=-1$, 且 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, 1]$. 函数 $g(x)=f(x)-4x+11$.

(1) 求 $f(x)$ 解析式;

(2) 当 $x < 0$ 时, 求 $\frac{f(x)}{x}$ 的最小值;

(3) 若第一象限内的点 (a, b) 在函数 $y=g(x)$ 图象上, 求 $a+\sqrt{\frac{b}{2}}$ 的最大值.

21. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上恒不为零的函数, 对任意 $m, n \in R$ 恒有 $f(m+n)=f(m) \cdot f(n)$, 且当 $x > 0$ 时, $0 < f(x) < 1$.

(1) 证明: $x \in R$ 时, 恒有 $f(x) > 0$;

(2) 证明: $f(x)$ 在 R 上是减函数;

(3) 若对任意 $x \in R$, 不等式 $f(a\sqrt{x^2+16}) \cdot f(-x^2-25) > 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx$ ($a, b \in R$).

(1) 若 $b=2a+2$, 解关于 x 的不等式 $f(x)+a < 0$;

(2) 当 $f(1)=-1$ 时, 存在 $a > -2$, $b > -\frac{1}{2}$, 使不等式 $4b+a+4 \leq t(a+2)(2b+1)$ 成立, 求实数 t 的取值范围.