西南大学附中 2021—2022 学年度上期期末考试

高二数学试题

（满分：150 分；考试时间：120 分钟）

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上.
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔填涂；答非选择题时，必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写；必须在题号对应的答题区域内作答，超出答题区域书写无效；保持答卷清洁、完整.
3. 考试结束后，将答题卡交回（试题卷学生保存，以备评讲）.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为（　　）

A. $x=1$　　B. $x=-1$　　C. $y=1$　　D. $y=-1$

2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 a_3，a_{14} 是方程 $x^2-4x+3=0$ 的两根，则 $S_{16}=$（

A. 32　　B. 30　　C. 28　　D. 26

3. 若在等比数列 $\{a_n\}$ 中，　$a_1+a_2=8, a_3+a_4=12$，那么 $a_5+a_6=$（　　）

A. 20　　B. 18　　C. 16　　D. 14

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_{n+1}^2-a_n^2=p$（$n\in N^*$，p 为常数），则 $\{a_n\}$ 称为“等方差数列”，下列对“等方差数列”的判断，其中不正确的为（　　）

A. 若 $\{a_n\}$ 是等方差数列，则 $\{a_n^2\}$ 是等差数列

B. 若 $\{a_n\}$ 是等方差数列，则 $\{a_n^2\}$ 是等方差数列

C. $\{(-1)^n\}$ 是等方差数列

D. 若 $\{a_n\}$ 是等方差数列，则 $\{a_{2n}\}$ 也是等方差数列

已知 F_1，F_2 为双曲线 C：$x^2-y^2=2$ 的左、右焦点，点 P 在 C 上，$\angle F_1PF_2=60°$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 等于（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 $2n+1$ 项，其中奇数项之和为 290，偶数项之和为 261，则 a_{n+1} 等于（

A. 27　　B. 28　　C. 29　　D. 30

7．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过点$F_2$作一条渐近线的垂线，垂足为$P$，若$\triangle PF_1F_2$的面积为$\frac{c^2}{2}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A．3　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

8．已知抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，过点F分别作两条直线l_1，l_2，直线l_1与抛物线C交于A、B两点，直线l_2与抛物线C交于D、E两点，若l_1与l_2的斜率的平方和为2，则$|AB|+|DE|$的最小值为（　　）

A．24　　B．20　　C．16　　D．12

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．已知曲线C的方程为$\frac{x^2}{m+1}+\frac{y^2}{m-3}=1$（$m\neq-1$且$m\neq3$），则下列结论正确的是（　　）

A．当$m=2$时，曲线C是焦距为4的双曲线

B．当$m=4$时，曲线C是离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的椭圆

C．曲线C可能是一个圆

D．当$m=1$时，曲线C是渐近线方程为$x\pm y=0$的双曲线

10．已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$q=\frac{1}{2}$，则（　　）

A．数列$\{a_{2n}\}$是等比数列　　B．数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是递减数列

C．数列$\{\log_2 a_n\}$是等差数列　　D．数列$\{a_n^2\}$是等比数列

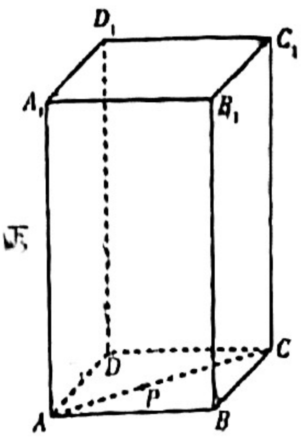
11．如图，在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是正方形，$AB=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\lambda\in[0,1]$，则（　　）

A．当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$DP\perp A_1C_1$

B．四棱锥$P-BB_1C_1C$体积的最大值为

C．当平面PB_1D_1截直四棱柱所得截面面积为$\frac{15}{8}$时，$\lambda=\frac{3}{4}$

D．四面体A_1C_1DP的体积为定值



12．已知F为椭圆C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$的左焦点，直线$l$：$y=kx\ (k\neq 0)$与椭圆$C$交于$A$，$B$两点，$AE\perp x$轴，垂足为$E$，$BE$与椭圆$C$的另一个交点____则（　　）

A．$\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}$的最小值为2　　　　B．$\triangle ABE$面积的最大值为$\sqrt{2}$

C．直线BE的斜率为$\frac{k}{2}$　　　　D．$\angle PAB$为直角

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．已知直线l_1：$ax-3y+1=0$与直线l_2：$2x+(a+1)y+1=0$垂直，则a的值为________．

14．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_4=128$，若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\log_2 a_n$，则数列$\{b_n\}$的前20项和为________．

15．直线l：$y=m(x+1)-1$与圆C：$(x-1)^2+y^2=6$交于A，B两点，当弦AB的长度最短时，则三角形ABC的面积为________

16．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1a_2a_3\cdots a_n=n+1\ (n\in N^*)$，若$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\lambda$对任意$n\in N^*$恒成立，则实数$\lambda$的取值范围为________．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10分）在等差数列$\{a_n\}$中，记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知：$a_2+a_5=-10$，$S_5=-30$．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求使$S_n=a_n$成立的n的值．

18．（12分）已知圆C：$x^2+y^2+Dx+Ey-3=0$关于直线$x-y-1=0$对称，且圆心C在x轴上．

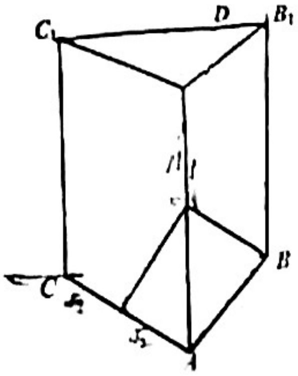
(1) 求圆C的方程；

(2) 直线l：$x+y+b=0$与圆C交于A，B两点，若$\triangle ABC$为等腰直角三角形，求直线l的方程．

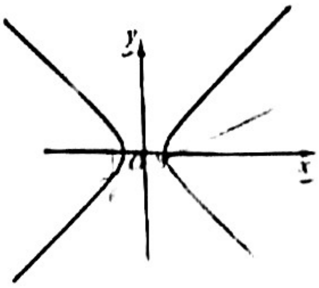
19．（12分）已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BA=BC=BB_1=2$，$\angle ABC=90°$，E，F分别是AC，AA_1的中点，D为棱B_1C_1上的点．

(1) 证明：$BF\perp DE$；

(2) 当$\overrightarrow{B_1C_1}=4\overrightarrow{B_1D}$时，求直线$BF$与平面$DEF$所成角的正弦值．



20．（12 分）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的一条渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x$，且双曲线 C 过点 $(2\sqrt{2}, 1)$．



(1) 求双曲线 C 的标准方程；

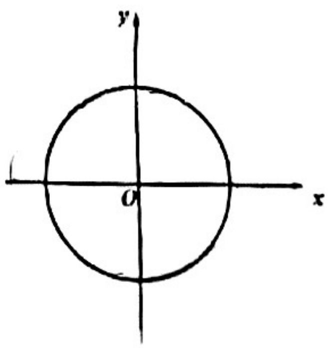
(2) 过点 $M(3, 0)$ 的直线与双曲线 C 的左右支分别交于 A，B 两点，是否存在直线 AB，使得 $|AM|\cdot|BM|=10$ 成立，若存在，求出直线 AB 的方程；若不存在，请说明理由．

21．（12 分）已知抛物线 E：$y^2=2px$（$p>0$）上横坐标为 3 的点 P 到焦点 F 的距离为 4．

(1) 求抛物线 E 的方程；

(2) 点 A，B 为抛物线 E 上异于原点 O 的两不同的点，且满足 $k_{OA}+k_{OB}=2$．若直线 AB 与椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 恒有公共点，求 m 的取值范围．

22．（12 分）设 O 为坐标原点，动点 P 在圆 O：$x^2+y^2=1$ 上，过点 P 作 y 轴的垂线，垂足为 Q，且 $\overrightarrow{QD}=\sqrt{2}\overrightarrow{QP}$



(1) 求动点 D 的轨迹 E 的方程；

(2) 直线 l 与圆 O：$x^2+y^2=1$ 相切，且直线 l 与曲线 E 相交于两不同的点 A，B，T 为线段 AB 的中点．线段 OA，OB 分别与圆 O 交于 M，N 两点．记 $\triangle AOT$，$\triangle MON$ 的面积分别为 S_1，S_2，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围．

（命题人、审题人：校命题小组）

西南大学附中 2021—2022 学年度上期期末考试

高二数学试题参考答案

1—5 DABBD　　6—8 CDC

9 AD　　10 ACD　　11 AD　　12 BCD

13．-3　　14．400　　15．$\sqrt{5}$　　16．$\lambda \ge 1$

17．解：(1) 由题，设$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d

则$\begin{cases} a_2+a_5=2a_1+5d=-10 \\ s_5=sa_1+\dfrac{5\times 4}{2}d=-30 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} a_1=-10 \\ d=2 \end{cases}$

$\therefore a_n=2n-12$

(2) $s_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{(2n-22)\cdot n}{2}=n^2-11n$

由$s_n=a_n$，即$n^2-11n=2n-12$，即$n^2-13n+12=0$

$\therefore n=1$或12

18．解：(1) 由题，圆$C:(x+\dfrac{D}{2})^2+(y+\dfrac{E}{2})^2=\dfrac{D^2}{4}+\dfrac{E^2}{4}+3$，圆心$(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2})$

由于圆C关于直线$x-y-1=0$对称

所以圆心在$x-y-1=0$上

又圆心在x轴上，所以联立$\begin{cases} x-y-1=0 \\ y=0 \end{cases}$

可解得圆心$C:(1,0)$，所以$-\dfrac{D}{2}=1$，$-\dfrac{E}{2}=0$，

$\therefore$圆$C:(x-1)^2+y^2=4$

(2) ΔABC为等腰直角三角形，$|CA|=|CB|=r=2$

$\therefore$弦长$|AB|=\sqrt{|CA|^2+|CB|^2}=2\sqrt{2}$

由弦长$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$即$2\sqrt{2}=2\sqrt{4-(\dfrac{1+b}{\sqrt{2}})^2}$

即$|1+b|=2$

$\therefore b=1$或-3

19．解：(1) 法一：取 AB 的中点 Q，连接 EQ，B_1Q，

$\triangle ABF$ 中，$\tan\angle ABF=\frac{|AF|}{|AB|}=\frac{1}{2}$

$\triangle B_1QB$ 中，$\tan\angle B_1QB=\frac{|BB_1|}{|BQ|}=2$

则 $\tan\angle ABF\cdot\tan\angle B_1QB=1$，

所以 $\angle ABF+\tan\angle B_1QB=\frac{\pi}{2}$

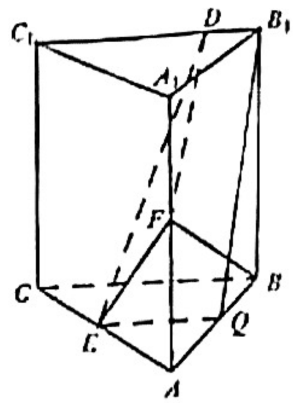
则 $BF\perp B_1Q$ ①

又 $\because BC\perp AB, BC\perp BB_1$

$\therefore BC\perp$ 面 ABB_1A_1，则 $BC\perp BF$ ②

由①② $\therefore BF\perp$ 面 B_1C_1EQ

又 $DE\subset$ 面 B_1C_1EQ，$\therefore BF\perp DE$

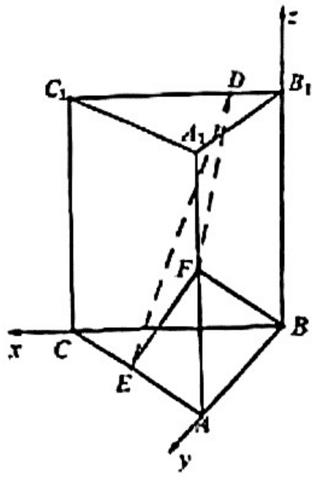


法二：以 B 为原点，BC，BA，BB_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，则 B（0，0，0），F（0，2，1），D（0，0，2），E（1，1，0）

$\therefore \overrightarrow{BF}=(0,2,1),\overrightarrow{BE}=(1-a,1,-2)$，

$\therefore \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=2-2=0$

$\therefore BF\perp DE$



(2) 由 $\overrightarrow{B_1C_1}=4\overrightarrow{B_1D}$，

则 $D(\frac{1}{2},0,2)$，$\overrightarrow{DE}=(\frac{1}{2},1,-2)$，

$=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{BF}=(0,2,1)$，

设面 DEF 的法向是 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}=\frac{1}{2}x+y-2z=0\\ \overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}=-x+y+z=0\end{cases}$

取 $\vec{n}=(2,1,1)$，设直线 BF 与平面 DEF 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{BF}>\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}\right|}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{BF}\right|}=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$

20. 解：(1) 由题$\begin{cases}\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{8}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$

$\therefore$双曲线方程：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1$

(2) 当直线 AB 斜为 0，则 AB：$y=0$，此时$|AM|=1,|BM|=5$

此时$|AM|\cdot|BM|=5$不符合.

$\therefore$直线 AB 斜率不为 0，设$AB:x=my+3$，

联立$\begin{cases}x=my+3\\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1\end{cases}$，可得（$m^2-4$）$y^2+6my+5=0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由于双曲线与直线 AB 交于左右支，

则：$\begin{cases}m^2-4\neq 0\\ \Delta=36m^2-20(m^2-4)=16m^2+80>0\\ y_1+y_2=\dfrac{-6m}{m^2-4}\\ y_1y_2=\dfrac{5}{m^2-4}>0\end{cases}$

$\therefore m^2>4$

$|AM|\cdot|BM|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-0|\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot|y_2-0|=(1+m^2)|y_1y_2|$，

$\therefore|AM|\cdot|BM|=\dfrac{5(1+m^2)}{m^2-4}$，

由题$|AM|\cdot|BM|=10$，即$\dfrac{5(1+m^2)}{m^2-4}=10$，

所以$m^2=9$，即$m=\pm3$，

所以存在直线 AB，使得$|AM|\cdot|BM|=10$成立，

此时直线 $AB:x=3y+3$ 或 $x=-3y+3$.

即直线 $AB:x-3y-3=0$ 或 $x+3y-3=0$.