西南大学附属中学校高 2024 届第一次定时训练

数学试题(2021.09)

(满分：150 分 考试时间：120 分钟)

一. 单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.命题"$\exists x\in R$,使$x^2+x-1=0$"的否定是（ D ）

A.$\exists x\in R$,使$x^2+x-1\neq 0$　　B.不存在$x\in R$,使$x^2+x-1=0$

C.$\forall x\notin R$,使$x^2+x-1\neq 0$　　D.$\forall x\in R$,使$x^2+x-1\neq 0$

大　小

2.已知集合$M=\{x|\ x=2m+1,m\in Z\}$，$N=\{x|\ x=4m+1,m\in Z\}$,则"$x\in M$"是"$x\in N$"的（ B ）

A.充分不必要条件　B.必要不充分条件　C.充要条件　D.既不充分也非必要条件

3.已知集合$A=\left\{1,a-2,2a^2-a-2\right\}$,若$-1\in A$,则实数$a$的值为（ C ）

A.1　B.1 或$-\dfrac{1}{2}$　C.$-\dfrac{1}{2}$　D.-1或$-\dfrac{1}{2}$

4.若$x<y$,设$M=x^2+2y^2,N=2xy+2y-1$，则（ A ）　$M-N=(x-y)^2+(y-1)^2>0$

A.$M>N$　B.$M<N$　C.$M\le N$　D.$M\ge N$

5.已知全集是实数集R,集合$A=\left\{x\middle|-3\le x<\dfrac{1}{2}\right\}$,$B=\left\{x\middle|2x^2-x-1<0\right\}$,则$(C_RA)\cup B=$（ C ）

$C_RA=(-\infty,-3)\cup[\frac{1}{2},+\infty)$　$B=(-\frac{1}{2},1)$

A.$\left\{x\middle|\ x<-3\text{或}x>\dfrac{1}{2}\right\}$　B.$\left\{x\middle|\dfrac{1}{2}\le x<1\right\}$　C.$\left\{x\middle|\ x<-3\text{或}x>-\dfrac{1}{2}\right\}$　D.$\left\{x\middle|\ x<-3\text{或}\dfrac{1}{2}\le x<1\right\}$

6.已知集合$A=\{x|\ y=\sqrt{x-1}\}$，$B=\left\{x\middle|\ x=\dfrac{1}{a-1},1<a\le\dfrac{3}{2}\right\}$,则下列选项正确的是(B)

$A=[1,+\infty)$　$B=[2,+\infty)$

A.$A=B$　B.$B\subsetneqq A$　C.$A\subseteq B$　D.$B\subseteq A$

7.已知实数a,b满足$a>\dfrac{1}{2},b>0$,若不等式$\dfrac{a^2}{2a-1}+\dfrac{b^2+4}{b}\ge m$恒成立,则实数$m$的取值范围是（ C ）

$a^2+1\ge 2a\Rightarrow\frac{a^2}{2a-1}\ge 1$

A.$m\le 8$　B.$m\ge\dfrac{9}{2}$　C.$m\le 5$　D.$m\ge 8$　$\frac{b^2+4}{b}=b+\frac{4}{b}\ge 4$　$\therefore m\le 5$

8.若集合$I=\{1,2,3,4,5\}$的两个非空子集M和N满足"M中的最大数小于N中的最小数",则称集合对(M,N)为集合I中的一组"伙伴子集对",那么集合I中的"伙伴子集对"共有（ A ）对.

A.49　B.64　C.72　D.98

M最大为1时，M有1个，N有$2^4-1=15$个，共$15\times1=15$(个)　M最大为3时，M有4个，N有$2^2-1=3$个，共$3\times4=12$(个)

M最大为2时，M有2个，N有$2^3-1=7$个，共$7\times2=14$(个)　M最大为4时，M有8个，N有$2^1-1=1$个，共$1\times8=8$(个)

$\therefore 15+14+12+8=49$(个)

二. 多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有错选的得 0 分.

$\begin{cases} ab<0 \\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab<0 \\ (b-a)\cdot ab>0 \end{cases} \Rightarrow a>b$

9.下列选项一定正确的是（ BD ）

A.若 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$,则 $a^{2024}>b^{2024}$ $a=0,\ b=-1$

B.若 $ab<0, \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,则 $a>b$

$\Leftarrow ab+a>ab+b$

C.若 $a>b$, $a+c>b+d$,则 $c>d$ $a=1, b=c=d=0$

D.若 $a>b>0$;则 $\frac{b+1}{a+1}>\frac{b}{a}$ $\Leftarrow a>b$

10.下列选项中两个集合相等的是（ AD ）

A. $P=\left\{x \mid x^2+x=0\right\}$, $Q=\left\{x \mid x=\frac{(-1)^n-1}{2}, n\in Z\right\}$

B. $P=\{\phi\}$, $Q=\{0\}$

C. $P=\{x \mid x=10k, k\in Z\}$, $Q=\{x \mid x=2m$ 且 $x=5n, m\in Z, n\in Z\}$ $m=1,\ n=0,\ Q=\phi$

D. $P=\left\{x \mid x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}, a\in R, b\in R\right\}$, $Q=\left\{x \mid x^5-3x^3-4x=0\right\}$ $P=\{-2,0,2\}$.

$x^5-3x^3-4x=0$

$\Rightarrow x(x+2)(x-2)(x^2+1)=0$

$\Rightarrow x=-2,0,2.$

11.下列选项一定正确的是（ BCD ）

A. $\forall x\in R, x+\frac{1}{x}\geq 2$ 当 $x<0$ 时，$x+\frac{1}{x}\leq -2$；当 $x>0$ 时，$x+\frac{1}{x}\geq 2$

B.若正实数 x，y 满足 $2x+y=1$,则 $\sqrt{2x}+\sqrt{y}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$ $2=(1+1)(2x+y)\geq(\sqrt{2x}+\sqrt{y})^2\Rightarrow\sqrt{2x}+\sqrt{y}\leq\sqrt{2}$

C.若 a>0，b>0，则 $\frac{1}{4}a+\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}$ 的最小值为 2 $\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}\geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=2$.（当且仅当 $a=4, b=2$ 时，取"="）

$(x+y)^2=1+3xy>1\Rightarrow x+y>1$ $(\because x,y>0)$

D.若正实数 x,y 满足 $x^2+y^2=1+xy$,则 $1<x+y\leq 2$ $(x+y)^2=1+3xy\leq 1+\frac{3}{4}(x+y)^2\Rightarrow x+y\leq 2$ $\Rightarrow 1<x+y\leq 2$

12.设集合 X 是实数集 R 的子集,如果实数 x_0 满足:对任意 r>0，都存在 $x\in X$ ，使得 $0<|x-x_0|<r$ 成立,那

$0<|x|<r$

么称 x_0 为集合 X 的聚点,则下列集合中0 为该集合的聚点的有(AC)

收敛→0 收敛→1

A. $\left\{x \mid x=\frac{1}{n}, n\neq 0,\ n\in Z\right\}$ B. $\left\{x \mid x=\frac{n}{n+1}, n\in N^*\right\}$ C. $\{x \mid x\in Q, x\neq 0\}$ D.整数集 Z

三. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知 $8<x^3<27, 3<y<4$,若 $t=\frac{x}{y^3}$,则 t 的取值范围是 $(\frac{1}{32}, \frac{1}{9})$.

$2<x<3$, $27<y^3<64$

$3(x-\frac{1}{6})^2+\frac{11}{12}\geq\frac{11}{12}$

14. $\exists x\in R$,使得不等式 $3x^2-x+1<m$ 成立,则 m 的取值范围是 $(\frac{11}{12}, +\infty)$.

15.已知集合 $A=\left\{x \mid x^2-2x-3\leq 0\right\}, B=\{x \mid x<4-m$ 或 $x>2m+4\}$。若 $A\cap(C_R B)=\phi$,则实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1)$

当 $B\neq R$，$B\supseteq A=[-1,3]$ $4-m\leq 2m+4<-1$ 或 $3<4-m\leq 2m+4\Rightarrow 0\leq m<1$

16.已知正实数 a,b 满足 $\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{2a+b}=1$,则 $a+b$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

当 $B=R$ 时，$4-m>2m+4$ $\Rightarrow m<0$

$\because 3(a+b)=(a+2b+2a+b)\cdot(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{2a+b})\geq(1+1)^2=4$

$\therefore a+b\geq\frac{4}{3}$

综上：$m\in(-\infty,1)$.

四. 解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.(10 分)已知集合 $U=\left\{x\in Z|2x^2-11x-6<0\right\}, A=\{1,2,3\}, B=\{3,5\}$,设集合 $M=(C_U A)\cap\left(C_U B\right)$

(1)求集合 M ;

(2)若 $C=\{x|-a\le x\le 2a-1, x\in R\}$,且 $M\cap C\ne\phi$,求 a 的取值范围.

解：(1) $\because 2x^2-11x-6<0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<x<6$

$\because x\in Z$

$\therefore U=\{0,1,2,3,4,5\}$

则 $(C_U A)\cap(C_U B)=C_U(A\cup B)=\{0,4\}$

$\therefore M=\{0,4\}$

(2) $-a\le 2a-1\Rightarrow a\ge\frac{1}{3}$

由题知，当 $0\in C$ 时，

则 $-a\le 0\le 2a-1\Rightarrow a\ge\frac{1}{2}$ ；

当 $4\in C$ 时，则 $-a\le 4\le 2a-1\Rightarrow a\ge\frac{5}{2}$

当 $0\in C$ 且 $4\in C$ 时，

则 $\begin{cases}-a\le 0\\ 2a-1\ge 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\ge 0\\ a\ge\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow a\ge\frac{5}{2}$

综上，$a\in[\frac{1}{2},+\infty)$

18.(12 分)已知 $a>0, b>0, a+3b=1$.

(1)求 $\frac{1}{a}+\frac{3}{b}$ 的最小值;

(2)若 $m>a^2+9b^2+7ab$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

解：(1) $\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{3}{b})(a+3b)\ge(1+3)^2=16$

当且仅当 $a=b=\frac{1}{4}$ 时，取"="

$\therefore(\frac{1}{a}+\frac{3}{b})_{min}=16$.

(2) $\because a^2+9b^2+7ab=(a+3b)^2+ab=1+ab$

$\because a+3b=1\Rightarrow a=1-3b>0$

$\therefore 0<b<\frac{1}{3}$

$\therefore 1+ab=1+b(1-3b)=-3b^2+b+1=-3(b-\frac{1}{6})^2+\frac{13}{12}$

当 $0<b<\frac{1}{3}$ 时，

$1+ab\in(1,\frac{13}{12}]$

故 $m\in(\frac{13}{12},+\infty)$

19.(12 分)已知集合 $A=\left\{x|\ x^2-4x+3=0\right\}$， $B=\left\{x|\ x^2-2(a+1)x+a^2+2=0\right\}$

(1)若 $A\cap B=A$,求 a 的值;

(2)若 $A\cup B=A$,求 a 的取值范围.

解：(1) $A=\{1,3\}$ ，$B\supseteq A$.

当 $1\in B$ 时，$1-2(a+1)+a^2+2=0$

$\Rightarrow a=1$.

当 $3\in B$ 时，$9-6(a+1)+a^2+2=0$

$\Rightarrow a=1$ 或 5.

当 $a=5$ 时，$x^2-12x+27=0$

$\Rightarrow x=3$ 或 9

$\therefore B=\{3,9\}$ 不满足题意,舍.

当 $1\in B$ 且 $3\in B$ 时，

$\begin{cases}2(a+1)=1+3\\ a^2+2=1\times 3\end{cases}\Rightarrow a=1$

综上：$a=1$

(2) 由题知，$B\subseteq A$.

当 $B=\phi$ 时，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2+2)<0$

$\Rightarrow a<\frac{1}{2}$

当 $B\ne\phi$ 时，$\Delta\ge 0\Rightarrow a\ge\frac{1}{2}$

由(1)知：$a=1$

综上：$\{a|a<\frac{1}{2}$ 或 $a=1\}$

20.(12 分)火车站有某公司待运的甲种货物$1530t$,乙种货物$1150t$.现计划用 A、B 两种型号的货厢共 50 节运送这批货物.已知 35t 甲种货物和 15t 乙种货物可装满一节 A 型货厢 25t 甲种货物和 35t 乙种货物可装满一节 B 型货厢.据此安排 A、B 两型货厢的节数,共有几种方案?若每节 A 型货厢的运费是 0.5 万元,每节 B 型货厢的运费是 0.8 万元，哪种方案的运费较少？

解：设安排A型货厢x节，则安排B型货厢$(50-x)$节，

$\therefore \begin{cases} 35x+25(50-x)\geq 1530 \\ 15x+35(50-x)\geq 1150 \end{cases} \Rightarrow 28\leq x\leq 30$

$\because x$是整数.

$\therefore x=28, 29, 30$

$\therefore$三种方案：A.28. B.22

A.29. B.21

A.30 B.20

费用：$28\times 0.5+22\times 0.8=31.6$(万元)

$29\times 0.5+21\times 0.8=31.3$(万元)

$30\times 0.5+20\times 0.8=31$ (万元)

$31<31.3<31.6$

$\therefore$安排A型货厢30节，B型货厢20节，运费最少.

21.(12 分)已知集合 $A=\left\{x \middle| \begin{cases} \dfrac{2x+3}{3}<x+2 \\ mx+1<0 \end{cases}\right\}$, $B=\{x \mid |x-m|<1\}$.

(1)求集合B;

(2)若"$x\in B$"是"$x\in A$"的必要不充分条件,求实数m的取值范围.

解：(1) $\because |x-m|<1$

$\Rightarrow -1<x-m<1$

$\Rightarrow m-1<x<m+1$

$\therefore B=\{x|m-1<x<m+1\}$

(2)由题知：$A\subsetneqq B$

$\because A=\left\{x \middle| \begin{cases} x>-3 \\ mx<-1 \end{cases}\right\}$

① 当$m=0$时，$A=\varnothing$满足条件；

② 当$m<0$时，$x>-\frac{1}{m}$不满足条件，舍去；

③ 当$m>0$时，$x<-\frac{1}{m}$，

i. 当$A=\varnothing$时，$-\frac{1}{m}\leq -3 \Rightarrow 0<m\leq \frac{1}{3}$；

ii. 当$A\neq\varnothing$时，$m-1<-3<-\frac{1}{m}<m+1$

$\Rightarrow m\in\varnothing$

综上：$m\in[0,\frac{1}{3}]$.

22.(12 分)已知$x>0, y>0, m>0, a=x+y, b=\sqrt{x^2+xy+y^2}, c=m\sqrt{xy}$.

(1)试比较a与b的大小,并证明你的结论;

(2)求证:对任意正数x, y,以a, b, c为三边可构成三角形的充要条件是$2-\sqrt{3}<m<2+\sqrt{3}$.

解：(1) $\because x>0, y>0$

$\therefore a=x+y>0$

$b=\sqrt{x^2+xy+y^2}>0$

$\therefore a^2-b^2=(x+y)^2-(x^2+xy+y^2)=xy>0$

$\therefore a^2>b^2$

故 $a>b$.

解(2)由题知，要构成三角形，

必须$\begin{cases} b+c>a \\ a+b>c \end{cases}$

先证必要性：

$\begin{cases} \sqrt{x^2+xy+y^2}+(2-\sqrt{3})\sqrt{xy}>x+y \\ x+y+\sqrt{x^2+xy+y^2}>(2+\sqrt{3})\sqrt{xy} \end{cases}$

$\because \dfrac{x+y+\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}}\geq \dfrac{2\sqrt{xy}+\sqrt{3xy}}{\sqrt{xy}}=2+\sqrt{3}$

当且仅当$x=y$时，取"=".

$\therefore m<2+\sqrt{3}$满足条件.

$\because \dfrac{x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1}$

令$u=\sqrt{\frac{x}{y}}$，则 $t-\sqrt{t^2-1}=\dfrac{1}{t+\sqrt{t^2-1}}$ 在$[2,+\infty)\downarrow$

$t=u+\frac{1}{u}\geq 2$ $\therefore t-\sqrt{t^2-1}\leq 2-\sqrt{3}$

$\therefore m>2-\sqrt{3}$满足条件. $\therefore$必要性得证.

再证充分性，

由$\begin{cases} \sqrt{x^2+xy+y^2}+m\sqrt{xy}>x+y \\ x+y+\sqrt{x^2+xy+y^2}>m\sqrt{xy} \end{cases}$

$\Rightarrow m<\dfrac{x+y+\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}}$对$\forall x,y\in R^+$恒成立.

$\because$右边$\geq 2+\sqrt{3}$ $\therefore m<2+\sqrt{3}$.

由$m>\dfrac{x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}}$对$\forall x,y\in R^+$恒成立.

$\because$右边$\leq 2-\sqrt{3}$. $\therefore m>2-\sqrt{3}$.

$\therefore$充分性得证.

综上，原题结论得证.