

湖南师大附中 2020—2021 学年度高一第二学期第一次大练习

数学参考答案

一、二、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	A	A	D	C	C	D	AD	ABD	AB	BD

1. B 【解析】因为复数 $z = \frac{1+3i}{1-i} = \frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -1+2i$, 则 $|z|$ 为 $\sqrt{5}$, 故选 B.

2. C 【解析】若 $a \parallel b$, 则 $1 \times (m+3) - 2m = 0$, $\therefore m = 3$, 故选 C.

3. A 【解析】因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立,

由 $a+b \leq 4$ 可得 $2\sqrt{ab} \leq 4$, 解得 $ab \leq 4$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立, 所以充分性成立;

当 $ab \leq 4$ 时, 取 $a=8, b=\frac{1}{3}$, 满足 $ab \leq 4$, 但 $a+b > 4$, 所以必要性不成立.

所以“ $a+b \leq 4$ ”是“ $ab \leq 4$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

4. A 【解析】由角 α 的终边在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上得 $\tan \alpha = \sqrt{3}$,

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

5. D 【解析】对于选项 A, $f(x) = -\sin x \cos x = -\frac{1}{2} \sin 2x$, 是奇函数;

对于选项 B, $f(x) = -|\sin x \cos x| = -\frac{1}{2} |\sin 2x|$, 显然是偶函数;

对于选项 C, $f(-x) = -|\sin(-x)| \cos(-x) = -|\sin x| \cos x = f(x)$, 是偶函数;

对于选项 D, $f(-x) = -\sin(-x) |\cos(-x)| = \sin x |\cos x| = -f(x)$, 是奇函数;

由图可知, 函数 $y = f(x) (x \in [-\pi, \pi])$ 是奇函数, 故 B, C 错误;

当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, $f(x) < 0$, 而此时 $-\sin x \cos x > 0$, 故 A 错误; 故选 D.

6. C 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由 $a \cos C + c \cos A = b \sin B$ 以及正弦定理可知,

$\sin A \cos C + \sin C \cos A = \sin B \sin B$, 即 $\sin(A+C) = \sin B = \sin B \sin B$.

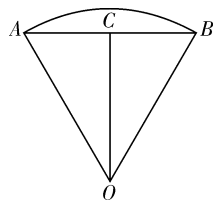
$\because 0 < B < \pi, \sin B \neq 0, \therefore \sin B = 1, B = \frac{\pi}{2}$. 所以三角形为直角三角形. 故选 C.

7. C 【解析】掷铁饼者张开的双臂及肩近似看成一张“弓”, 即如图中的 \widehat{AB} 及弦 AB , 取 AB 的中点 C , 连接 OC .

由题设可得 \widehat{AB} 的弧长为 $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$, 而 $OA = \frac{15}{16}$,

故 $\angle AOB = \frac{\frac{5\pi}{8}}{\frac{15}{16}} = \frac{2\pi}{3}$, 故 AB 的长度为 $2BC = 2 \times \frac{15}{16} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{15}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{16}$,

故答案为: C.



8. D 【解析】由于 AB 是圆 O 的一条直径, 所以 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$,

连接 OP , 于是 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PO}^2 - 4$.

连接 OE, OF , 在 $\triangle OEF$ 中, 当 $OP \perp EF$ 时, OP 最小,

由于 $OE = OF = EF = 2$, 所以 OP 的最小值为 $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$,

因此 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值是 -1 , 故选 D.

9. AD 【解析】A. $\because i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$, \therefore A 正确; B. 由复数虚部的概念知, 复数 $z = 3 - i$ 的虚部为 -1 , \therefore B 错误; C. $\because z = (1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i$, 其共轭复数 $\bar{z} = -3 - 4i$, $\bar{z} = -3 - 4i$ 在复平面对应的点 $(-3, -4)$ 在第三象限, \therefore C 错误; D. 由题意, 设 $z = x + yi$, 由 $|z - 1| = |z + 1|$, 得 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, \therefore 复数 z 的几何意义是复平面的点到 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$ 距离相等的点的轨迹, 是连接两点的线段的垂直平分线, \therefore D 正确, 故选 AD.

10. ABD 【解析】对于 A, 令 $t = -x^2 + 1$, 则 t 的最大值为 1 , $\therefore y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 故 A 错误; 对于

B, \because 函数 $y = \log_a(2 - ax)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数, $\therefore \begin{cases} a > 1 \\ 2 - a \geq 0 \end{cases}$, 解得 $1 < a \leq 2$, B 错误; 对于 C, $\because A(-1, 1)$,

$B(1, 2), C(-2, -1), D(3, 4)$, $\therefore \overrightarrow{AB} = (2, 1), \overrightarrow{CD} = (5, 5)$, $\therefore \overrightarrow{AB}$ 在 \overrightarrow{CD} 方向的投影为 $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{2 \times 5 + 1 \times 5}{\sqrt{5^2 + 5^2}}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 故 \overrightarrow{AB} 在 \overrightarrow{CD} 方向上的投影向量为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}$, 故 C 正确; 对于 D, 向量 $\mathbf{a} = (-1, 2)$ 与 $\mathbf{b} = (m, 1)$ 的夹角为锐

角, 则两向量数量积大于 0 且两向量不共线, 即 $-1 \times m + 2 > 0$ 且 $-1 \times 1 - 2m \neq 0$, $\therefore m < 2$ 且 $m \neq -\frac{1}{2}$, 故 D

不正确. 故选 ABD.

11. AB 【解析】由 $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 4\mathbf{e}$, 且 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = -2\mathbf{e}$ 可求得 $\mathbf{a} = \frac{2}{7}\mathbf{e}, \mathbf{b} = -\frac{8}{7}\mathbf{e}$, 则由向量共线定理可知 \mathbf{a}, \mathbf{b} 共线, 故

A 正确; 由 λ, μ 为相异实数可知 λ, μ 不同时为 0 , 故 $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$, 即 \mathbf{a}, \mathbf{b} 共线, 故 B 正确; 由 $x + y = 0$ 可知, 若 $x = y = 0$ 时, \mathbf{a}, \mathbf{b} 可以不共线, 故 C 不正确; 若 AB, CD 分别为两条腰时, \mathbf{a}, \mathbf{b} 不共线, 故 D 不正确; 故选 AB.

12. BD 【解析】对于 A, 若 $f(x) = 2^x$, 定义域为 \mathbf{R} , 当 $x \neq y$ 时, $f(x) + f(y) = 2^x + 2^y > 2\sqrt{2^x \cdot 2^y} = 2 \times 2^{\frac{x+y}{2}} =$

$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, 所以函数 $y = 2^x$ 不是“S 函数”, 故 A 错误; 对于 B, 若 $f(x) = x - \sin x + 1$, 定义域为 \mathbf{R} , 当 $y =$

$-x$ 且 $x \neq 0$ 时, $2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2f(0) = 2 \times (0 - 0 + 1) = 2$, $f(x) + f(y) = f(x) + f(-x) = x - \sin x + 1 - x -$

$\sin(-x) + 1 = 2$, 所以存在 $x, y \in \mathbf{R}, x \neq y$ 时, $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 成立, 所以函数 $y = x - \sin x + 1$ 是

“S 函数”, 故 B 正确; 对于 C, 若 $f(x) = \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$, 当 $x \neq y$ 且 $x > 0, y > 0$ 时, $x + y > 2\sqrt{xy}$,

所以 $2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\ln \frac{x+y}{2} > 2\ln \sqrt{xy} = \ln xy = \ln x + \ln y = f(x) + f(y)$, 所以函数 $y = \ln x$ 不是“S 函

数”, 故 C 错误; 对于 D, 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 则当 $x \neq y$, 且 $x, y < 0$ 时, $\frac{x+y}{2} < 0$, 所以 $2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2 \times 1 =$

$2, f(x)+f(y)=1+1=2$, 所以存在 $x, y \in \mathbf{R}, x \neq y$ 时, $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 成立, 所以函数 $y=$

$$\begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0 \end{cases} \text{ 是“S函数”, 故 D 正确. 故选 BD.}$$

三、填空题

13.2 【解析】因为 $f(x)=(m^2-m-1)x^m$ 是幂函数, 所以 $m^2-m-1=1$, 解得 $m=2$ 或 $m=-1$,

又因为 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 所以 $m=2$.

14. $\frac{3}{2}$ 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3, AC=2, BC=\sqrt{10}$,

$$\therefore \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC} = \frac{3^2 + 2^2 - (\sqrt{10})^2}{2 \times 3 \times 2} = \frac{1}{4},$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos A = 3 \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

故答案为 $\frac{3}{2}$.

15. $(-\infty, 2\sqrt{2}]$ 【解析】命题“ $\exists x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 使得 $2x^2 - \lambda x + 1 < 0$ 成立”是假命题, 即“ $2x^2 - \lambda x + 1 \geq 0$ 在 $x \in$

$\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 恒成立”是真命题, 即 $\lambda \leq \frac{2x^2+1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$, 则只需求 $2x + \frac{1}{x}$ 的最小值即可,

$\because x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right], \therefore 2x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$ (当且仅当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立), 故实数 λ 的取值范围是 $\lambda \leq 2\sqrt{2}$,

故答案为 $(-\infty, 2\sqrt{2}]$.

16. 0, $2\sqrt{5}$ 【解析】如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 可得 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$,

$$\begin{aligned} & |\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 \overrightarrow{AC} + \lambda_6 \overrightarrow{BD}| \\ &= |\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \lambda_6 (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})| \\ &= |(\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_6) \overrightarrow{AB} + (\lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \overrightarrow{AD}| \\ &= \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_6)^2 + (\lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6)^2}, \end{aligned}$$

由于 $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 取遍 ± 1 ,

当 $\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_6 = 0, \lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 0$ 时,

可取 $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_6 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_4 = -1$, 可得所求最小值为 0;

接下来求最大值:

$\because |\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_6|, |\lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6|$ 的最大值都为 4,

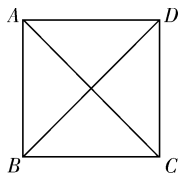
但是①当 $\lambda_5 + \lambda_6 = 2$ 或 -2 时, $\lambda_5 - \lambda_6 = 0$,

$|\lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6|$ 可取最大值 4, $|\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_6|$ 最大值只能取 2;

②当 $\lambda_5 + \lambda_6 = 0$ 时, $\lambda_5 - \lambda_6 = 2$ 或 -2 ,

$|\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5 - \lambda_6|$ 可取最大值 4, $|\lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6|$ 最大值只能取 2.

可得所求最大值为 $\sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$. 故答案为: 0; $2\sqrt{5}$.



四、解答题

17.【解析】(1) $f(x)=a \cdot b=\sqrt{3} \sin x-2 \cos ^2 \frac{x}{2}+1=\sqrt{3} \sin x-\cos x=2 \sin \left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, 3 分

令 $2 k \pi-\frac{\pi}{2} \leq x-\frac{\pi}{6} \leq 2 k \pi+\frac{\pi}{2}$, 解得 $2 k \pi-\frac{\pi}{3} \leq x \leq 2 k \pi+\frac{2 \pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

故 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[2 k \pi-\frac{\pi}{3}, 2 k \pi+\frac{2 \pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z}$ 5 分

(2) 把 $f(x)$ 图象上所有点横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍得到函数 $g(x)$ 的图象,

\therefore 函数 $g(x)$ 的解析式为 $g(x)=2 \sin \left(2 x-\frac{\pi}{6}\right)$, 7 分

关于 x 的方程 $g(x)-m=0$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有解, 等价于求 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域,

$\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \therefore-\frac{\pi}{6} \leq 2 x-\frac{\pi}{6} \leq \frac{5 \pi}{6}$, 即 $-1 \leq g(x) \leq 2$,

故实数 m 的取值范围为 $[-1, 2]$ 10 分

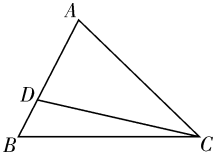
18.【解析】(1) 因为 $2 a-b=2 c \cdot \cos B$, 由正弦定理得 $2 \sin A-\sin B=2 \sin C \cdot \cos B$, 2 分

因为 $\sin A=\sin (B+C)$, 代入上式得 $2 \sin B \cos C+2 \cos B \sin C-\sin B=2 \sin C \cos B$, 4 分

即 $2 \sin B \cos C-\sin B=0$, 因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos C=\frac{1}{2}$, 5 分

因为 C 是三角形内角, 所以 $C=\frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 如图所示, 由题知 $\overrightarrow{AD}=2 \overrightarrow{DB}$,



即 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=2(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}), \overrightarrow{CD}=\frac{1}{3} \overrightarrow{CA}+\frac{2}{3} \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}^2=\left(\frac{1}{3} \overrightarrow{CA}+\frac{2}{3} \overrightarrow{CB}\right)^2$, 9 分

即 $b^2+4 b-11=0$, 解得 $b=\sqrt{15}-2$ (舍负). 12 分

19.【解析】(1) 由题知 $\angle A C B=8^{\circ}, \angle B A C=45^{\circ}$,

在 $\triangle A B C$ 中, 由正弦定理得 $\frac{A B}{\sin \angle A C B}=\frac{B C}{\sin \angle B A C}$, 即 $\frac{50}{\sin 8^{\circ}}=\frac{B C}{\sin 45^{\circ}}$, 2 分

所以 $B C \approx \frac{50 \times 0.7}{0.14}=250 \text{ m}$ 3 分

在 $\text{Rt} \triangle B D C$ 中, $\sin \angle B C D=\frac{B D}{B C}$, 即 $\sin 37^{\circ}=\frac{B D}{250}$, 4 分

所以 $B D \approx 250 \times 0.6=150 \text{ m}$, 5 分

所以山高 $B E=B D+D E=150+1.5=151.5 \approx 152 \text{ m}$ 6 分

(2) 由题知 $\angle A M D=\beta, \angle B M D=\alpha$,

则在 $\text{Rt} \triangle B M D$ 中, $\tan \alpha=\frac{B D}{M D}=\frac{150}{x}$, 在 $\text{Rt} \triangle A M D$ 中, $\tan \beta=\frac{A D}{M D}=\frac{200}{x}$, 其中 $0 < x \leq 200$, 8 分

由题知 $\angle AMB = \beta - \alpha$,

$$\text{则 } \tan \angle AMB = \tan (\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{200}{x} - \frac{150}{x}}{1 + \frac{200}{x} \cdot \frac{150}{x}} = \frac{50x}{x^2 + 30000} = \frac{50}{x + \frac{30000}{x}} \leq \frac{50}{2\sqrt{x \cdot \frac{30000}{x}}} =$$

$$\frac{50}{200\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

当且仅当 $x = \frac{30000}{x}$ 即 $x = 100\sqrt{3}$ m 时, $\tan \angle AMB$ 取得最大值, 即视角最大. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. 【解析】(1) 由 $\log_2 \left(\frac{1}{x} + 2 \right) > 0$, 得 $\frac{1}{x} + 2 > 1$, 即 $\frac{1+x}{x} > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 0$,

因此不等式的解集为 $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由题意, 知函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上是减函数, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

因此 $f(x)_{\min} = f(t+1), f(x)_{\max} = f(t)$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$$\text{则 } f(t) - f(t+1) = \log_2 \left(\frac{1}{t} + a \right) - \log_2 \left(\frac{1}{t+1} + a \right) \leq 1, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{化简得 } at^2 + (a+1)t - 1 \geq 0, \text{ 该式对任意的 } t \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right] \text{ 恒成立. } \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

因为 $a > 0$, 所以函数 $y = at^2 + (a+1)t - 1$ 在区间 $\left[\frac{1}{3}, 1 \right]$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{当 } t = \frac{1}{3} \text{ 时, } y \text{ 有最小值 } \frac{4a-6}{9}, \text{ 则由 } \frac{4a-6}{9} \geq 0, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{得 } a \geq \frac{3}{2}, \text{ 故实数 } a \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{3}{2}, +\infty \right). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 【解析】(1) $\because D$ 为 BC 的中点, $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MD}$,

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

又 $\because P, M, Q$ 三点共线,

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP} + (1-\lambda)\overrightarrow{AQ} = \lambda x \overrightarrow{AB} + (1-\lambda)y \overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda x = \frac{1}{3}, \\ (1-\lambda)y = \frac{1}{3}, \end{cases} \quad \text{故 } \frac{1}{3x} + \frac{1}{3y} = 1, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{即 } y = f(x) = \frac{x}{3x-1} \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right). \dots\dots\dots 6 \text{ 分 (其中定义域 1 分)}$$

$$(2) \text{ 设 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S_2 = 1, \text{ 则 } \triangle APQ \text{ 的面积 } S_1 = xy = \frac{x^2}{3x-1} \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{令 } t = 3x-1, t \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right],$$

$$\text{则 } k = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\left(\frac{t+1}{3} \right)^2}{t} = \frac{t^2 + 2t + 1}{9t} = \frac{1}{9} \left(t + \frac{1}{t} + 2 \right), t \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right], \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } k \in \left[\frac{4}{9}, \frac{1}{2} \right]. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22.【解析】(1)当 $a=c=d=1, b=0$ 时, $f(x)=x+1, g(x)=x^3+x+1$,

令 $f(x)=0$, 得 $x=-1$, 而 $g(f(-1)) \neq 0$, 即 $x=-1$ 不是 $g(f(x))$ 的零点, 不满足②, 所以 $f(x), g(x)$ 不是一对“K 函数”. 3 分

(2)由 $f(x), g(x)$ 为一对“K 函数”, 不妨设 x_0 满足 $f(x_0)=0$,

则由②知 $g(f(x_0))=g(0)=0, \therefore d=0$ 4 分

又由 $a=1, f(1)=0$, 得 $b=-c$, 5 分

$$\therefore f(x)=-cx^2+cx=-cx(x-1), g(x)=x^3-cx^2+cx=x(x^2-cx+c),$$

令 $g(f(x))=0$, 得 $f(x)=0$ 或 $[f(x)]^2-cf(x)+c=0$,

由 $f(x)=0$ 得 $x_1=0, x_2=1$, 可推出 $g(f(x))=0$,

根据题意 $g(f(x))$ 的零点均为 $f(x)$ 的零点, 故 $[f(x)]^2-cf(x)+c=0$ 必然无非零实数根.

令 $t=f(x)=-cx(x-1)$, 则 $t^2-ct+c=0$ 必然无非零实数根. 7 分

$$\textcircled{1} \text{ 当 } c>0 \text{ 时, } t=-cx^2+cx=-c\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{c}{4} \leq \frac{c}{4},$$

令 $h(t)=t^2-ct+c=\left(t-\frac{c}{2}\right)^2+c-\frac{c^2}{4}$ 在 $t \in \left(-\infty, \frac{c}{4}\right]$ 上单调递减,

$$\therefore h(t)_{\min}=h\left(\frac{c}{4}\right)>0, \text{ 即 } \frac{c^2}{16}-\frac{c^2}{4}+c>0, \text{ 解得: } c \in \left(0, \frac{16}{3}\right); \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } c<0 \text{ 时, } t=-cx^2+cx=-c\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{c}{4} \geq \frac{c}{4},$$

令 $h(t)=t^2-ct+c=\left(t-\frac{c}{2}\right)^2+c-\frac{c^2}{4}$ 在 $t \in \left[\frac{c}{4}, \frac{c}{2}\right]$ 上单减, 在 $t \in \left(\frac{c}{2}, +\infty\right)$ 上单增,

$$\therefore h(t)_{\min}=h\left(\frac{c}{2}\right)>0, \text{ 即 } c-\frac{c^2}{4}>0, \text{ 解得: } c \in (0, 4), \text{ 故 } c<0 \text{ 不成立; } \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

③当 $c=0$ 时, $b=0$, 此时 $f(x)=0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立, $g(f(x))=0$ 也恒成立.

综上可知, 实数 c 的取值范围是 $\left[0, \frac{16}{3}\right)$ 12 分