# 西南大学附属中学校高 2024 届第二次定时训练

# 数 学 试 题

（满分：150 分；考试时间：120 分钟）

2021 年 10 月

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上.
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔填涂；答非选择题时，必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写；必须在题号对应的答题区域内作答，超出答题区域书写无效；保持答卷清洁、完整.
3. 考试结束后，将答题卡交回（试题卷自行保管，以备评讲）.

## 一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $P=\{x\mid x^2-x-2\geq 0\}$，$Q=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$，则 $(C_R P)\cap Q=$（ C ）

A. $\{-1, 0, 1, 2\}$　　B. $\{-1, 0\}$　　C. $\{0, 1\}$　　D. $\{0, 1, 2\}$

2. 已知命题 $p:\forall x>0$，$x^2+1\geq 1$，则 $\neg p$ 为（ C ）

A. $\exists x\leq 0$，$x^2+1<1$　B. $\exists x\leq 0$，$x^2+1\geq 1$　C. $\exists x>0$，$x^2+1<1$　D. $\exists x<0$，$x^2+1\leq 1$

3. 下列函数中，值域为 $(0,+\infty)$ 的是（ D ）

A. $y=\sqrt{x-1}$　　B. $y=\dfrac{1}{x-1}$　　C. $y=x^2$　　D. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

4. “$|m|\neq 2$”是“$m\neq 2$”的（ A ）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

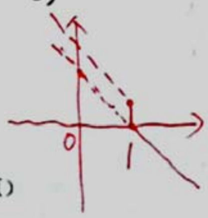
5. 集合 $M=\{x\mid x=3k-2, k\in Z\}$，$P=\{x\mid x=3n+1, n\in Z\}$，$S=\{x\mid x=6m+1, m\in Z\}$ 之间的关系是（ C ）

A. $S=P\subsetneqq M$　　B. $S\subsetneqq P\subsetneqq M$　　C. $S\subsetneqq P=M$　　D. $P=M\subsetneqq S$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1\\ -x+1, & x\geq 1\end{cases}$，对任意实数 $x_1$，$x_2$ $(x_1\neq x_2)$ 都满足 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则实数 $a$ 的取值范围是（ B ）

A. $\left[\dfrac{1}{7}, +\infty\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{3}\right)$　　C. $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$

$\therefore \begin{cases} 3a-1<0 \\ (3a-1)\times 1+4a\geq 0 \end{cases}$




$\therefore \dfrac{1}{7}\leq a<\dfrac{1}{3}$

7. 给定函数 $f(x)=\frac{x}{2}$，$g(x)=-x^2+x$，$x\in R$．用 $m(x)$ 表示 $f(x)$，$g(x)$ 中的较小者，记为 $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$，则 $m(x)$ 的最大值为（ A ）

A. $\frac{1}{4}$　　　B. 1　　　C. 0　　　D、$-1$

8. 已知 $a>0$，$b>0$，$a+2b=1$，则 $\frac{b^2+a+1}{ab}$ 的最小值为（ D ）

A. $4+\sqrt{10}$　　　B. $4+2\sqrt{10}$　　　C. $6+\sqrt{10}$　　　D. $6+2\sqrt{10}$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 在下列四组函数中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是（ B C

A. $f(x)=x-1$，$g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

B. $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

C. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2}}$，$g(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$

D. $f(x)=\sqrt{(x-1)(x-3)}$，$g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-3}$

8. 解：原式 $=\frac{b}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}$
$=\frac{1-a}{2a}+\frac{1}{b}+\frac{a+2b}{ab}$
$=\frac{5}{2a}+\frac{2}{b}-\frac{1}{2}$
$=(\frac{5}{2a}+\frac{2}{b})(a+2b)-\frac{1}{2}$
$\geq\frac{2a}{b}+\frac{5b}{a}+6$ $\geq 2\sqrt{10}+6$

10. 下列 $a$ 的取值中　能使函数 $f(x)=ax^2-2x-3$ 在区间（$-\infty$，1）上单调递减的是（ B D

A. $a\in(1,+\infty)$　　　B. $a=0$　　　C. $a\in(-\infty,1]$　　　D. $a\in[0,1]$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x\ (x\geq 1)\\ f(x+1)(x<1)\end{cases}$　$g(x)=4x^2+2x$，则下列结论正确的是（ ACD

A. $f(g(0))=\frac{1}{2}$　　　B. $g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{3}{4}$ × $\frac{15}{4}$

C. $f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增　　　D. $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

12. 在 $\Delta ABC$ 中，三边长分别为 $a$，$b$，$c$，且 $abc=4$，则下列结论正确的是（ABC）

A. $a^2b<4+ab^2$　　　B. $ab+a+b>4$　　　C. $a+b^2+c^2>4$　　　D. $a+b+c<4$

解：对于A：$a^2b-ab^2<abc$
$ab(b-a)<abc$
$b-a<c$
∴ A正确

对于B：∵ $a+b>c$
∴ $ab+a+b>c+ab$
$=c+\frac{4}{c}\geq 4$
∴ $ab+a+b>4$　B正确

对于C：∵ $b^2+c^2\geq 2bc$
∴ $a+b^2+c^2\geq 2bc+a$
$=2\times\frac{4}{a}+a$
$=\frac{8}{a}+a$
$\geq 4\sqrt{2}>4$
∴ C正确

对于D：∵ $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$
∴ $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{4}>4$
∴ D错误

16. 解. 对称轴为 $x=1$. 开口向上

$\begin{cases} a-b+c=1 \\ -\frac{b}{2a}=1 \end{cases}$ ∴ $b=-2a$ , $c=1-a+b$

又∵ $-1< a+b+c$

∴ $-1<a+(-2a)+1-a+(-2a)$

∴ $a<\frac{1}{2}$

又∵ $a>0$

∴ $0<a<\frac{1}{2}$

**三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 已知 $f(2x-1)=4x+2$，则 $f(0)=$ ___4___.

14. 若“$\exists x\in R$，$x^2+2kx+2<0$”为假命题，则 $k$ 的取值范围为 ___$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$___

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为（$a$，$b$），其中 $b>a+2$，则 $F(x)=f(2x-1)+f(2x+1)$ 的定义域是 ___$\left(\frac{a+1}{2},\frac{b-1}{2}\right)$___

16. 若关于 $x$ 的不等式 $-1<ax^2+bx+c<1$ 解集为 $(-1, 3)$，则正实数 $a$ 的取值范围是 ___$0<a<\frac{1}{2}$___.

**四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. 已知集合 $A=\left\{x\middle|\frac{x+1}{2-x}\geq 0\right\}$，函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ 的定义域为集合 $B$.

(1) 求 $A\cup B$，$(C_RA)\cap(C_RB)$；

(2) 若 $M=\{x|x\leq m\}$，且 $M\cup B=R$，求实数 $m$ 的取值范围.

(1) 由 $\frac{x+1}{2-x}\geq 0$ 得 $-1\leq x<2$

∴ $A=\{x|-1\leq x<2\}$

由 $x^2-2x-3>0$ 得

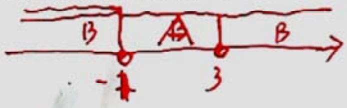
$B=\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$

∴ $A\cup B=\{x|x<2$ 或 $x>3\}$

$(C_RA)\cap(C_RB)=C_R(A\cup B)$

$=\{x|2\leq x\leq 3\}$

(2)




$m\geq 3$

18. 设不等式 $|2x-5|\leq 3$ 的解集为 $A$，关于 $x$ 的不等式 $x^2-(a+2)x+2a\leq 0(a\in R)$ 的解集为 $B$.

(1) 求集合 $A$，$B$；

(2) 若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，求实数 $a$ 的取值范围.

(1) $-3\leq 2x-5\leq 3$

$2\leq 2x\leq 8$

$1\leq x\leq 4$

∴ $A=\{x|1\leq x\leq 4\}$

$(x-a)(x-2)\leq 0$

当 $a=2$ 时 $x=2$ $B=\{2\}$

当 $a<2$ 时，$a<x<2$，$B=\{x|a<x<2\}$

当 $a>2$ 时，$a<x<a$，$B=\{x|2<x<a\}$

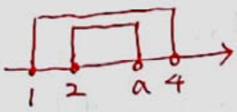
(2) 由已知 $B\subseteq A$

① 当 $a=2$ 时，$B=\{2\}\subseteq A$

② 当 $a<2$ 时，


$1\leq a<2$

③ 当 $a>2$ 时




$2<a\leq 4$

综上 $a$ 范围为：$1\leq a\leq 4$

19. 一个工厂生产某种产品每年需要固定投资100万元，此外，每生产1件该产品还需要增加投资1万元，年产量$x$($x\in N^*$)件，当$x\le 20$时，年销售总收入为$(33x-x^2)$万元；当$x>20$时，年销售总收入为260万元，记该工厂生产并销售这种产品所得的年利润为$y$万元（年利润=年销售总收入－年总投入）.

(1) 求$y$（万元）与$x$（件）的函数关系式；

(2) 当该工厂的年产量为多少时，所得年利润最大？最大年利润是多少？

(1) $y=\begin{cases}33x-x^2-x-100 & (x\le 20)\\ 260-x-100 & (x>20)\end{cases}$

$=\begin{cases}-x^2+32x-100 & (x\le 20)\\ -x+160 & (x>20)\end{cases}$

(2) 当$x=16$时，$y$最大为156万元

20. 已知二次函数$f(x)$满足$f(1)=1$，$f(2)=-1$，且$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,1]$．函数$g(x)=f(x)-4x+11$．

(1) 求$f(x)$解析式；

(2) 当$x<0$时，求$\dfrac{f(x)}{x}$的最小值；

(3) 若第一象限内的点$(a,b)$在函数$y=g(x)$图象上，求$a+\sqrt{\dfrac{b}{2}}$的最大值.

(1) 设$f(x)=ax^2+bx+c$

$\begin{cases}a+b+c=1\\ 4a+2b+c=-1\\ -\frac{b}{2a}=1 \text{ 且 } a<0\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a=-2\\ b=4\\ c=-1\end{cases}$

$\therefore f(x)=-2x^2+4x-1$

(2) 当$x<0$时，$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{-2x^2+4x-1}{x}$

$=-2x-\dfrac{1}{x}+4$

$\ge 2\sqrt{(-2x)\cdot(-\frac{1}{x})}+4$

$=2\sqrt{2}+4$

当且仅当$-2x=-\frac{1}{x}$，即$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，取等号

(3) $a>0$，$b>0$

$g(x)=-2x^2+4x-1-4x+11$

$=-2x^2+10$

$b=-2a^2+10$

$\therefore 2a^2+b=10$

$\therefore a+\sqrt{\frac{b}{2}}=a+\sqrt{5-a^2}$

$\because (a+\sqrt{5-a^2})^2=5+2a\sqrt{5-a^2}$

$=5+2\sqrt{a^2(5-a^2)}$

$\le 5+a^2+5-a^2$

$=10$

$\therefore a+\sqrt{5-a^2}$最大值为$\sqrt{10}$．

当且仅当$a^2=5-a^2$

即$a=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$，$b=\frac{5}{4}$时

取等号．

21. 设 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上恒不为零的函数，对任意 $m$，$n\in R$ 恒有 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$，且当 $x>0$ 时，$0<f(x)<1$.

(1) 证明：$x\in R$ 时，恒有 $f(x)>0$；

(2) 证明：$f(x)$ 在 $R$ 上是减函数；

(3) 若对任意 $x\in R$，不等式 $f(a\sqrt{x^2+16})\cdot f(-x^2-25)>1$ 恒成立，求实数 $a$ 的取值范围.

(1) 当 $x>0$ 时，$0<f(x)<1$ 恒有 $f(x)>0$

当 $x=0$ 时，令 $m=0$，$n>0$ 有 $0<f(n)<1$

$f(0+n)=f(0)f(n)$ ∴ $f(0)=1$ 恒有 $f(0)>0$

当 $x<0$ 时，则 $-x>0$，$0<f(-x)<1$

∵ $f(0)=f(x-x)=f(x)\cdot f(-x)=1$

∴ $f(x)=\dfrac{1}{f(-x)}>0$

综上知 $x\in R$ 时，恒有 $f(x)>0$

(2) 设 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$ 则 $x_2-x_1>0$ ∴ $0<f(x_2-x_1)<1$

$$
\begin{aligned}
f(x_1)-f(x_2)&=f(x_1)-f(x_2-x_1+x_1)\\
&=f(x_1)-f(x_2-x_1)\cdot f(x_1)\\
&=f(x_1)[1-f(x_2-x_1)]\\
&>f(x_1)>0
\end{aligned}
$$

∴ $f(x_1)>f(x_2)$ ∴ $f(x)$ 在 $R$ 上是减函数

(3) ∵ $f(0)=1$

∴ $f(a\sqrt{x^2+16}-x^2-25)>f(0)$

又∵ $f(x)$ 在 $R$ 上减函数

∴ $a\sqrt{x^2+16}-x^2-25<0$

∴ $a<\dfrac{x^2+25}{\sqrt{x^2+16}}=\dfrac{x^2+16+9}{\sqrt{x^2+16}}$

$=\sqrt{x^2+16}+\dfrac{9}{\sqrt{x^2+16}}$

∴ $\left(\sqrt{x^2+16}+\dfrac{9}{\sqrt{x^2+16}}\right)$ 最小值为 $\dfrac{25}{4}$.

当且仅当 $x=0$ 时，取最小值.

∴ $a<\dfrac{25}{4}$

22. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx$（$a$，$b\in R$）.

(1) 若 $b=2a+2$，解关于 $x$ 的不等式 $f(x)+a<0$；

(2) 当 $f(1)=-1$ 时，存在 $a>-2$，$b>-\frac{1}{2}$，使不等式 $4b+a+4\le t(a+2)(2b+1)$ 成立，求实数 $t$ 的取值范围.

解 (1) $b=2a+2$

$f(x)=ax^2+(2a+2)x$

由 $f(x)+a<0$ 得

$ax^2+(2a+2)x+a<0$

① 当 $a=0$ 时，$x<0$

② 当 $a>0$ 时，$\Delta=8a+4$.

$$x_1=\frac{-(2a+2)+\sqrt{8a+4}}{2a}=\frac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a}$$

$$x_2=\frac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a}$$

$\therefore \frac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a}<x<\frac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a}$

③ 当 $a<0$ 时，

若 $a<-\frac{1}{2}$ 时，无解

若 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$x<\frac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{a}$ 或 $x>\frac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{a}$

若 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$x\neq\frac{-a-1}{a}$

(2) $\because f(1)=-1$

$\therefore a+b=-1$

$\because a>-2$，$b>-\frac{1}{2}$

$\therefore a+2>0$，$2b+1>0$

$\therefore (a+2)(2b+1)>0$

$\therefore t\geq\frac{4b+a+4}{(a+2)(2b+1)}$

$$\because \frac{4b+a+4}{(a+2)(2b+1)}=\frac{4(-a-1)+a+4}{(a+2)(-2a-2+1)}=\frac{-3a}{(a+2)(-2a-1)}=\frac{3a}{2a^2+5a+2}=\frac{3}{2a+\frac{2}{a}+5}$$

令 $a+2=x$，$2b+1=y$

$\therefore a=x-2$，$b=\frac{y-1}{2}$　$\because a+b=-1$　$\therefore \frac{2x}{3}+\frac{y}{3}=1$

$$\therefore \frac{4b+a+4}{(a+2)(2b+1)}=\frac{4\cdot\frac{y-1}{2}+x-2+4}{xy}=\frac{x+2y}{xy}=\frac{1}{y}+\frac{2}{x}=\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x}\right)\times\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}\right)=\frac{2x}{3y}+\frac{2y}{3x}+\frac{5}{3}\geq 2\sqrt{\frac{2x}{3y}\cdot\frac{2y}{3x}}+\frac{5}{3}=3$$

$\therefore t\geq 3$