

西南大学附属中学校高 2023 级第一次月考

数学试题

(满分：150 分，考试时间：120 分钟)

2020 年 9 月

一、单选题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 下列关系正确的是

- A. $\{0\} \in \{0,1,2\}$ B. $\{0,1\} \neq \{1,0\}$ C. $\{0,1\} \subseteq \{(0,1)\}$ D. $\emptyset \subseteq \{0,1\}$

2. 已知集合 $A = \{1, 3^a\}$, $B = \{a, b\}$, 若 $A \cap B = \left\{\frac{1}{3}\right\}$, 则 $a^2 - b^2 =$

- A. 0 B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

3. 若 $x > 0$, $y > 0$, $M = \frac{x+y}{1+x+y}$, $N = \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}$, 则 M 、 N 的大小关系是

- A. $M = N$ B. $M < N$ C. $M \leq N$ D. $M > N$

4. 若实数 a, b 满足 $a \geq 0$, $b \geq 0$, 且 $ab = 0$, 则称 a 与 b 互补, 记 $\varphi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$ 那么 $\varphi(a, b) = 0$ 是 a 与 b 互补的

- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知不等式 $ax^2 - bx - 1 \geq 0$ 的解集是 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{3}\right\}$, 则不等式 $x^2 - bx - a < 0$ 的解集是

- A. $\{x \mid 2 < x < 3\}$ B. $\{x \mid x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$
C. $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right\}$ D. $\left\{x \mid x < \frac{1}{3} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$

6. 若 $a > 0$, $b > 0$ 且 $a + b = 7$, 则 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b+2}$ 的最小值为

- A. $\frac{8}{9}$ B. 1 C. $\frac{9}{8}$ D. 2

7. 关于 x 的不等式 $x^2 - (a+1)x + a < 0$ 的解集中恰有两个整数, 则实数 a 的取值范围是

- A. $-2 < a \leq -1$ 或 $3 \leq a < 4$ B. $-2 \leq a \leq -1$ 或 $3 \leq a \leq 4$
C. $-2 \leq a < -1$ 或 $3 < a \leq 4$ D. $-2 < a < -1$ 或 $3 < a < 4$

8. 下列说法正确的是

- A. 若命题 p , $\neg q$ 都是真命题, 则命题 “ $(\neg p) \vee q$ ” 为真命题
- B. 命题 “若 $x + y \neq 5$, 则 $x \neq 2$ 或 $y \neq 3$ ” 与命题 “若 $x = 2$ 且 $y = 3$, 则 $x + y = 5$ ” 真假相同
- C. “ $x = -1$ ” 是 “ $x^2 - 5x - 6 = 0$ ” 的必要不充分条件
- D. 命题 “ $\forall x > 1, 2^x > 0$ ” 的否定是 “ $\exists x_0 \leq 1, 2^{x_0} \leq 0$ ”

二、多选题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分)

9. 下列各不等式, 其中不正确的是

- A. $a^2 + 1 > 2a (a \in \mathbb{R})$
- B. $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2 (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$
- C. $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2 (ab \neq 0)$
- D. $x^2 + \frac{1}{x^2+1} > 1 (x \in \mathbb{R})$

10. 下列不等式中可以作为使 $x^2 < 1$ 成立的一个充分不必要条件有

- A. $x < 1$ B. $0 < x < 1$ C. $-1 < x < 0$ D. $-1 < x < 1$

11. 下列命题正确的是

- A. $\exists a, b \in \mathbb{R}, |a - 2| + (b + 1)^2 \leq 0$
- B. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},$ 使得 $ax > 2$
- C. $ab \neq 0$ 是 $a^2 + b^2 \neq 0$ 的充要条件
- D. 若 $a \geq b > 0$, 则 $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

12. 给定数集 M , 若对于任意 $a, b \in M$, 有 $a + b \in M$, 且 $a - b \in M$, 则称集合 M 为闭集合, 则下列说法中不正确的是

- A. 集合 $M = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ 为闭集合
- B. 正整数集是闭集合
- C. 集合 $M = \{n = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ 为闭集合
- D. 若集合 A_1, A_2 为闭集合, 则 $A_1 \cup A_2$ 为闭集合

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____

14. 若 “ $x > 3$ ” 是 “ $x > a$ ” 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围是 _____

15. 若不等式 $ax^2 + 2ax - 4 < 0$ 的解集为 \mathbb{R} , 则实数 a 的取值范围是 _____

16. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x + 3y = xy$, 若 $t^2 + t < x + 3y$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是 _____

四、解答题: (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分) 解不等式:

(1) $\frac{2x-1}{3-4x} > 1$

(2) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ -x^2 + 3x - 2 \leq 0 \end{cases}$

18.(12 分) 已知全集 $U = R$, 集合 $A = \{x^2 - 4x - 5 \leq 0\}$, $B = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$

(1) 求 $A \cap (C_U B)$;

(2) 若集合 $C = \{x | a \leq x \leq 4a, a > 0\}$, 满足 $C \cup A = A$, $C \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

19.(12 分) 已知 p : 对于 $\forall x \in R, x^2 + kx + k > 0$ 成立; q : 关于 k 的不等式 $(k - m)(k - 2) \leq 0 (m < 2)$ 成立.

(1) 若 p 为真命题, 求 k 的取值范围;

(2) 若 p 是 q 的必要不充分条件, 求 m 的取值范围.

20.(12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - \left(m + \frac{1}{m}\right)x + 1$.

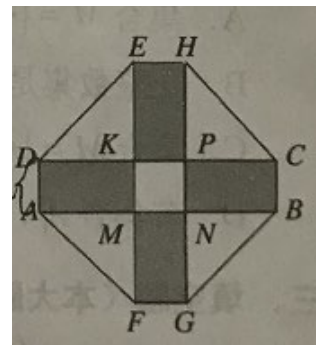
(1) 若不等式 $f(x) < 0$ 解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < 3\right\}$ 时, 求实数 m 的值;

(2) 当 $m > 0$ 时, 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$.

21.(12 分) 重庆某湿地公园打算建造一个休闲花园，它的平面结构图如图所示，两个相同的矩形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 构成面积为 200 平方米的十字形区域，且计划在正方形 $MNPK$ 上建一座花坛，其造价为 4200 元/平方米，在四个相同的矩形上（图中阴影部分）铺花岗岩路面，其造价为 210 元/平方米，并在四个三角形空地上铺草坪，其造价为 80 元/平方米。

(1) 设 AD 的长为 x 米，试写出总造价 Q (单位：元) 关于 x 的函数解析式；

(2) 问：当 x 取何值时，总造价最少？求出这个最小值。



22.(12 分) 设 n 为正整数, 集合 $A=\{\alpha|\alpha=(t_1, t_2, \dots, t_n), t_k \in \{0,1\}, k=1,2,\dots,n\}$. 对于集合 A 中的任意元素 $\alpha=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\beta=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, 记 $M(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[(x_1 + y_1 + |x_1 - y_1|) + (x_2 + y_2 + |x_2 - y_2|) + \dots + (x_n + y_n + |x_n - y_n|)]$

(1) 当 $n=3$ 时, 若 $\alpha=(0,1,1)$, $\beta=(0,0,1)$, 求 $M(\alpha, \alpha)$ 和 $M(\alpha, \beta)$ 的值

(2) 当 $n=4$ 时, 对于 A 中的任意两个不同的元素 α, β

证明: $M(\alpha, \beta) \leq M(\alpha, \alpha) + M(\beta, \beta)$. 并举一个使得等号成立的 α, β 的例子。

高一数学参考答案

1—8 D C B C A B C B

9. ACD 10. BC 11. AD 12. ABD

13. $\{2\}$ 14. $a < 3$ 15. $(-4, 0]$; 16. $(-4, 3)$.

17. (1) $\left\{x \mid \frac{2}{3} < x < \frac{3}{4}\right\}$

(2) $\{x \mid -1 < x \leq 1 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$

18. (1) $A \cap (C_U B) = \{x \mid -1 \leq x < 2 \text{ 或 } 4 < x \leq 5\}$; (2) $\left\{a \mid 1 \leq a \leq \frac{5}{4}\right\}$

【解】

(1) 由题 $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$, $C_U B = \{x \mid x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$, $A \cap (C_U B) = \{x \mid -1 \leq x < 2 \text{ 或 } 4 < x \leq 5\}$;

(2) 由 $C \cup A = A$ 得 $C \subseteq A$, 则 $\begin{cases} a \geq -1 \\ 4a \leq 5 \end{cases}$, 解得 $-1 \leq a \leq \frac{5}{4}$,

由 $C \cap B = B$ 得 $B \subseteq C$, 则 $\begin{cases} a \leq 2 \\ 4a \geq 4 \end{cases}$, 解得 $1 \leq a \leq 2$,

\therefore 实数 a 的取值范围为 $\left\{a \mid 1 \leq a \leq \frac{5}{4}\right\}$.

19. (1) $0 < k < 4$; (2) $0 < m < 2$.

【解】

(1) 对于 $\forall x \in R$, $x^2 + kx + k > 0$ 成立, 所以 $\Delta = k^2 - 4k < 0$, $0 < k < 4$;

(2) 因为 $m < 2$, 由 $(k - m)(k - 2) \leq 0$ 得 $m \leq k \leq 2$, 又 P 是 Q 的必要不充分条件, 所以 $0 < m < 2$.

20. (1) $m = 3$ 或 $\frac{1}{3}$ (2) 答案见解析

【解】

$$f(x) = (x - m) \left(x - \frac{1}{m} \right)$$

(1) $\because f(x) = (x - m) \left(x - \frac{1}{m} \right) < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < 3\right\}$

$$\therefore \begin{cases} m = 3 \\ \frac{1}{m} = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{1}{m} = 3 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\therefore m = 3$ 或 $\frac{1}{3}$

(2) 当 $m = \frac{1}{m}$, 即 $m = 1$ 时, $f(x) = (x-1)^2 \geq 0$ 恒成立. $\therefore x \in R$

当 $m > \frac{1}{m}$, 即 $m > 1$ 时, $x \geq m$ 或 $x \leq \frac{1}{m}$

当 $m < \frac{1}{m}$, 即 $0 < m < 1$ 时, $x \geq \frac{1}{m}$ 或 $x \leq m$

综上: $m = 1$ 时, 不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 R ;

$m > 1$ 时, 不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $\{x | x \geq m \text{ 或 } x \leq \frac{1}{m}\}$;

$0 < m < 1$ 时, 不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $\{x | x \leq m \text{ 或 } x \geq \frac{1}{m}\}$

.....12 分

21. (1) $Q = 38000 + 4000x^2 + \frac{400000}{x^2} (0 < x < 10\sqrt{2})$; (2) 当 $x = \sqrt{10}$ 时, $Q_{\min} = 118\,000$ (元).

【解】

(1) 设 $AM = y$, $AD = x$,

$$\text{则 } x^2 + 4xy = 200, \therefore y = \frac{200 - x^2}{4x}.$$

$$\text{故 } Q = 4200x^2 + 210 \times 4xy + 80 \times 2y^2 = 38\,000 + 4000x^2 + \frac{400000}{x^2} \quad (0 < x < 10\sqrt{2}).$$

.....5 分

(2) 令 $t = x^2$, 则 $Q = 38\,000 + 4\,000(t + \frac{100}{t})$, 且 $0 < t < 200$.

由基本不等式得: $x = \sqrt{10}$ 时, $Q_{\min} = 118\,000$ (元).

.....12 分

22. 【解】

(1) 因为 $\alpha = (0, 1, 1)$, $\beta = (0, 0, 1)$,

$$\text{所以 } M(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2}[(0+0+|0-0|) + (1+1+|1-1|) + (1+1+|1-1|)] = 2,$$

$$M(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[(0+0+|0-0|) + (1+0+|1-0|) + (1+1+|1-1|)] = 2;$$

.....5 分

(2) 当 $n = 4$ 时, 对于 A 中的任意两个不同的元素 α, β ,

设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\beta = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, 有

$$M(\alpha, \alpha) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad M(\beta, \beta) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4.$$

对于任意的 $x_i, y_i, i = 1, 2, 3, 4$,

当 $x_i \geq y_i$ 时, 有 $\frac{1}{2}(x_i + y_i + |x_i - y_i|) = \frac{1}{2}[x_i + y_i + (x_i - y_i)] = x_i$,

当 $x_i \leq y_i$ 时, 有 $\frac{1}{2}(x_i + y_i + |x_i - y_i|) = \frac{1}{2}[x_i + y_i - (x_i - y_i)] = y_i$.

即 $\frac{1}{2}(x_i + y_i + |x_i - y_i|) = \max\{x_i, y_i\}$,

所以, 有 $M(\alpha, \beta) = \max\{x_1, y_1\} + \max\{x_2, y_2\} + \max\{x_3, y_3\} + \max\{x_4, y_4\}$,

又因为 $x_i, y_i \in \{0, 1\}$,

所以 $\max\{x_i, y_i\} \leq x_i + y_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, 当且仅当 $x_i y_i = 0$ 时等号成立,

所以, $\max\{x_1, y_1\} + \max\{x_2, y_2\} + \max\{x_3, y_3\} + \max\{x_4, y_4\}$

$\leq (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4)$

$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$,

即 $M(\alpha, \beta) \leq M(\alpha, \alpha) + M(\beta, \beta)$, 当且仅当 $x_i y_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 时等号成立;

.....11 分

举例给 1 分.....12 分