

西南大学附中 2021—2022 学年度上期期中考试

高二数学试题

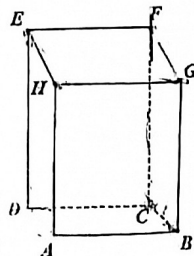
(满分: 150 分; 考试时间: 120 分钟)

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上.
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔填涂; 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写; 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持答卷清洁、完整.
3. 考试结束后, 将答题卡交回 (试题卷学生留存, 以备评讲).

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x = 1$, 则它的圆心坐标和半径分别是 ()
A. $(2, 0), 5$ B. $(2, 0), \sqrt{5}$ C. $(2, 0), \sqrt{3}$ D. $(0, 2), \sqrt{3}$
2. 如果 $AB < 0$, $BC > 0$, 那么直线 $Ax + By + C = 0$ 不经过 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知斜率为 1 的直线 l_1 与圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 1$ 相切于点 P , 经过点 P 且与 l_1 垂直的直线 l_2 的方程为 ()
A. $x + y + 1 = 0$ B. $x + y - 1 = 0$ C. $x - y + 1 = 0$ D. $x - y - 1 = 0$
4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过点 $A(-2, m)$ 和 $B(m, 4)$ 的直线与直线 $2x + y - 1 = 0$ 平行, 则 m 的值为 ()
A. 0 B. 10 C. 2 D. -8
5. 已知直线 l 的方向向量是 $\vec{a} = (3, 2, 1)$, 平面 α 的法向量是 $\vec{u} = (-1, 2, -1)$, 则 l 与 α 的位置关系是 ()
A. $l \perp \alpha$ B. $l // \alpha$ C. $l // \alpha$ 或 $l \subset \alpha$ D. l 与 α 相交但不垂直
6. 左图是常见的一种灭火器消防箱, 抽象成数学模型如右图所示的六面体, 其中四边形 $ADEH$ 和 $BCFG$ 为直角梯形, A, D, C, B 为直角顶点, 其他四个面均为矩形, $AB = BG = 3$, $FC = 4$, $BC = 1$, 下列说法正确的是 ()
A. 该几何体是四棱台
B. 该几何体是棱柱, 面 $ABCD$ 是底面
C. $EG \perp HC$
D. 面 $EFGH$ 与面 $ABCD$ 所成锐二面角为 45°

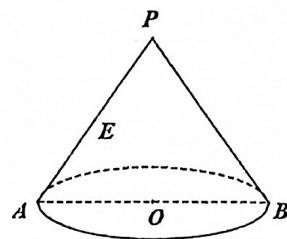


7. 若 P 是直线 $l: 3x+4y+1=0$ 上一动点, 过 P 作圆 $C: (x-2)^2+(y-2)^2=4$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则四边形 $PACB$ 面积的最小值为 ()

A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{7}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{7}$

8. 如图: $\triangle PAB$ 为圆锥的轴截面, $AB=2$, $\angle PAB=60^\circ$, 点 E 为 PA 的中点, 过点 E 作既与直线 PB 平行又与平面 PAB 垂直的截面, 该平面与圆锥底面上的圆周交于 F, G 两点, 记直线 EF 与圆锥底面所成的角为 α , 记直线 PA 与截面所成的角为 β , 则 α 与 β 的关系为 ()

A. $\alpha < \beta$ B. $\alpha = \beta$
C. $\alpha > \beta$ D. 以上都有可能



二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 关于空间向量, 以下说法正确的是 ()

A. 已知三棱锥 $O-ABC$, 点 P 为平面 ABC 上的一点, 且 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OC}$ ($m, n \in R$), 则 $m - n = \frac{1}{2}$

B. 已知向量 \vec{u}, \vec{v} 不共线, 若 $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{b} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{c} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$, 则 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面

C. 已知向量 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则存在向量可以与 \vec{a}, \vec{b} 构成空间的一个基底

D. 已知空间两点 $A(1, 0, 2), B(2, -2, -1)$, 若向量 $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$, 且 $|\overrightarrow{CD}| = 2\sqrt{7}$, 则 $\overrightarrow{CD} = \sqrt{2}\overrightarrow{AB}$

10. 已知点 $P(1, 1)$ 与直线 $l: x-y+1=0$, 下列说法正确的是 ()

A. 过点 P 且截距相等的直线与直线 l 一定垂直

B. 过点 P 且与坐标轴围成的面积为 2 的直线有 4 条

C. 点 P 关于直线 l 的对称点坐标为 $(0, 2)$

D. 直线 l 关于点 P 对称直线方程为 $x-y-1=0$

11. 下列四个命题中是真命题的是 ()

A. 圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ 恰有三条公切线

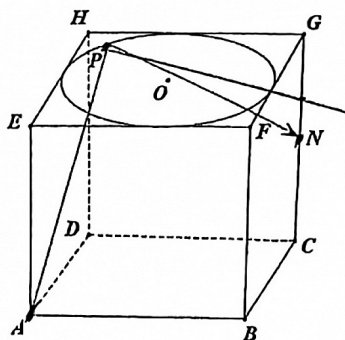
B. 若点 $P(3a+1, 4a)$ 在圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的内部, 则 $a \in \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$

C. 若直线 $y = x + b$ 与曲线 $y = \sqrt{4-x^2}$ 只有一个公共点, 则 $b \in [-2, 2]$

D. 若 $y = |x|$ 的图象与圆 $(x-m)^2 + y^2 = 8$ 有两个公共点, 则 $m \in (-4, 4)$

12. 如图：正方体 $ABCD-EFGH$ 棱长为 2， N 为线段 CG 的中点， P 为正方形 $EFGH$ 的内切圆 $\odot O$ 上的动点，则下列结论正确的是（ ）

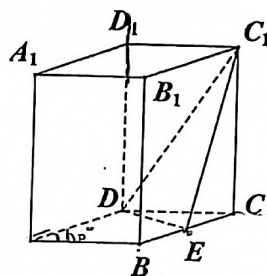
- A. $PA+PN$ 的最小值为 $\sqrt{17}$
 B. 在线段 CG 上存在一定点 M ，总使得 $\angle APM = 90^\circ$
 C. $\angle APN$ 可能为直角
 D. $\triangle APN$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{13}}{4}$



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 将直线 $x+y-3=0$ 绕与 x 轴的交点逆时针旋转 60° 后，直线的倾斜角为_____.
14. 已知空间向量 $\vec{a}=(1, 0, 1)$ ， $\vec{b}=(1, 1, n)$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b}=3$ ，则向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为_____.

15. 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形， $AA_1=4$ ， $AB=2$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ， E 是 BC 的中点. 则点 C 到平面 C_1DE 的距离为_____.



16. 从圆 $x^2+y^2=4$ 上的点向圆 $x^2+y^2=1$ 引切线，两个切点间的线段称为“切点弦”，则“切点弦”的中点的轨迹方程为_____，所有的“切点弦”所占据的面积为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知直线 $l_1: ax+(a+2)y+1=0$ ， $l_2: x+ay-1=0$.

- (1) 若 $l_1 \perp l_2$ ，求实数 a 的值；
 (2) 若 $l_1 \parallel l_2$ ，求 l_1 与 l_2 之间的距离.

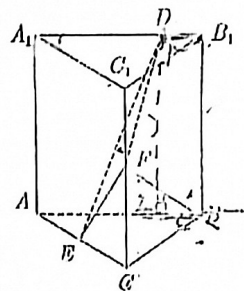
18. (12 分) 在平面直角坐标系中，已知圆 $C: x^2+y^2-8y+12=0$ ，直线 $l: (3m+1)x+(1-m)y-4=0$.

- (1) 求证：直线 l 与圆 C 总有两个不同的交点；
 (2) 在① $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$ ，② $|\vec{AB}|$ 最小，③ 过 A, B 两点分别作圆 C 的切线，切线交于点 $P(2, 2)$. 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中并求解：

设圆 C 的圆心为 C ，直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点，当_____时，求直线 l 的方程.

19. (12分) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB=BC=2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF \perp A_1B_1$.

- (1) 求异面直线 DE 与 BF 的夹角;
(2) 若 $A_1B_1=4B_1D$, 求平面 BB_1C_1C 与平面 DFE 所成的二面角的夹角的正弦值.



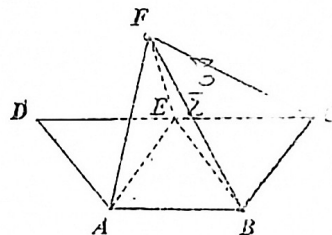
20. (12分) 已知圆 C_1 过点 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ 且圆心在直线 $l: x-y-1=0$ 上, 圆

$$C_2: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 2.$$

- (1) 求圆 C_1 的方程并判断圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系;
(2) 在直线 l 上是否存在点 P , 使得过 P 分别作圆 C_1 和圆 C_2 的切线, 切点分别为 A, B , 满足 $2|PA|=|PB|$, 若存在, 求出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

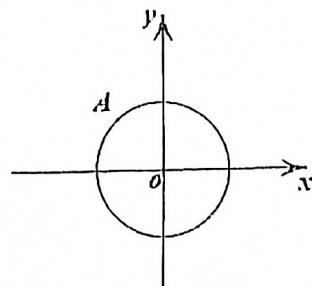
21. (12分) 等腰梯形 $ABCD$, $2AB=2BC=CD$, $\angle ABC=120^\circ$, 点 E 为 CD 的中点, 沿 AE 将 $\triangle DAE$ 折起, 使得点 D 到达 F 位置.

- (1) 当 $FB=BC$ 时, 求证: $BE \perp$ 平面 AFC ;
(2) 当 $BF = \frac{\sqrt{6}}{2}BC$ 时, 过点 F 作 FG , 使 $\overrightarrow{FG} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ($\lambda > 0$), 当直线 BG 与平面 BEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$ 时, 求 λ 的值.



22. (12分) 过圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$ 上一点 $A(-2, 2)$ 作圆的切线, 切线与 x 轴交于点 B , 过点 B 的直线与圆 C 交于不同的两点 M, N , MA, NA 分别交直线 $x=-4$ 交于点 P, Q .

- (1) 求点 B 的坐标;
(2) 求 $\frac{|PB|}{|QB|}$ 的值.



(命题人、审题人: 联合命题小组)