

重庆市育才中学校高 2023 届高三（上）第一次月考
数学试题 2022.9

本试卷为第 I 卷（选择题）和第 II 试卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 作答时，务必将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将答题卡交回。

第 I 卷

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 设集合 $A = \{y | y = \lg|x|\}$ ， $B = \{x | y = \sqrt{1-x}\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. $[0, +\infty)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[0, 1]$ D. $(0, 1]$

2. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ， i 是虚数单位，若 $a-2i$ 与 $3-bi$ 互为共轭复数，则 $(a+bi)^2 =$ ()

- A. $5+6i$ B. $5-6i$ C. $5+12i$ D. $5-12i$

3. 已知三个不同的平面 α, β, γ 和两条不重合的直线 m, n ，则下列四个命题中正确的是 ()

- A. 若 $m \parallel \alpha$ ， $\alpha \cap \beta = n$ ，则 $m \parallel n$ B. 若 $\alpha \cap \beta = n$ ， $m \subset \alpha$ ， $m \perp n$ ，则 $\alpha \perp \beta$
C. 若 $\alpha \cap \beta = m$ ， $m \perp \gamma$ ，则 $\alpha \perp \gamma$ D. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $\gamma \perp \beta$ ，则 $\alpha \parallel \gamma$

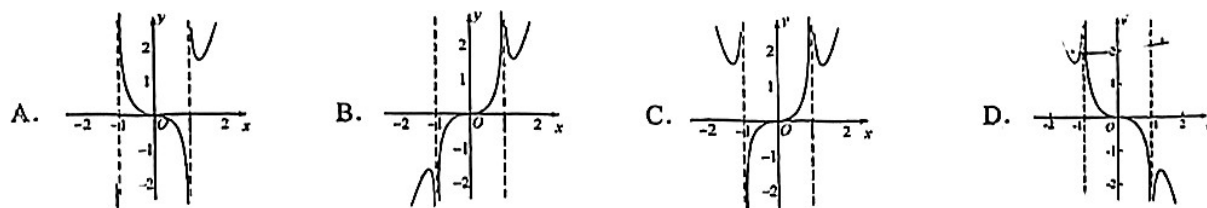
4. 已知函数 $f(x) = \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ， $f(x)$ 向左移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位所得函数为奇函数，则 φ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{9}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

5. 区块链作为一种新型的技术，已经被应用于许多领域。在区块链技术中，某个密码的长度设定为 512B，则密码一共有 2^{512} 种可能，为了破解该密码，最坏的情况需要进行 2^{512} 次运算。现在有一台计算机，每秒能进行 1.25×10^{13} 次运算，那么在最坏的情况下，这台计算机破译该密码所需时间大约为 () (参考数据： $\lg 2 \approx 0.3$ ， $\sqrt{10} \approx 3.16$)

- A. $6.32 \times 10^{141} \text{s}$ B. $6.32 \times 10^{140} \text{s}$ C. $3.16 \times 10^{141} \text{s}$ D. $3.16 \times 10^{140} \text{s}$

6. 函数 $y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4-1}}$ 的图像大致是 ()



7. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{2}$, P 为矩形内一点, 且 $AP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 和 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$,

则实数 $2\lambda + \mu$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

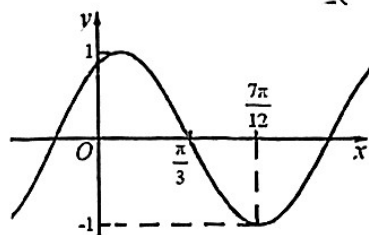
8. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbb{R} , 且 $f(x) + g(1-x) = 4, g(x) - f(x-3) = 8$. 若 $y = g(x)$ 的图像关于直

线 $x=1$ 对称, $g(1) = 2$, 则 $\sum_{k=1}^{23} f(k) =$ ()

- A. -40 B. -50 C. -42 D. -52

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) \left(\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$ 的图象如图所示, 则关于函数 $f(x)$ 下列结论中正确的是 ()



- A. $\omega = 2$ B. $f(-\frac{5\pi}{3}) = 0$
C. 对称轴为 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ D. 对称中心为 $(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 0) (k \in \mathbb{Z})$

10. 折扇是我国古老文化的延续, 在我国已有四千年左右的历史, “扇”与“善”谐音, 折扇也寓意“善良”“善行”. 它常以字画的形式体现我国的传统文化, 也是运筹帷幄、决胜千里、大智大勇的象征 (如图 1). 图 2 是一个圆台的侧面展开图 (扇形的一部分), 若两个圆弧 DE, AC 所在圆的半径分别是 3 和 9, 且 $\angle ABC = 120^\circ$, 则该圆台的 ()

- A. 高为 $4\sqrt{2}$
B. 体积为 $\frac{50\sqrt{2}}{3}\pi$
C. 表面积为 34π
D. 上底面积、下底面积和侧面积之比为 1:9:22



图1

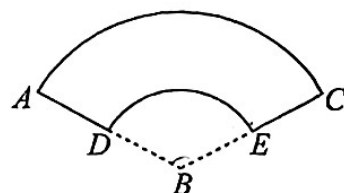
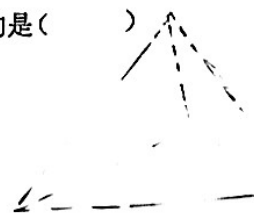


图2

11. 已知正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 2, 底面 BCD 所在平面上一点 P 满足 $AP = \sqrt{3}$, 下列说法正确的是 ()

- A. 点 P 运动轨迹长度为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ B. 直线 AP 与底面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$
 C. $|DP|$ 的最大值为 $\sqrt{3}$ D. 直线 AP 与直线 CD 所成角的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$



12. 已知平面内两个给定的向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$, 则使得 $|\vec{a} - \vec{c}| = |\vec{c} - \vec{b}| = 1$ 的 \vec{c} 可能有 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 无数个

第 II 卷

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (3, 1), \vec{b} = (1, 0), \vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$. 若 $\vec{a} \perp \vec{c}$, 则 $k =$ _____.

14. 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{4}{\cos^2 x}$ 取最小值时 $\tan x =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1}, g(x) = 9^x - t \cdot 3^x$, 若存在实数 a, b 同时满足 $f(a) + f(b) = 0$ 和 $g(a) + g(b) = 0$,

则实数 t 的取值范围为 _____.

16. 设 $f'(x)$ 是定义在 R 上的连续函数 $f(x)$ 的导函数, $f'(x) - f(x) < 4e^x$ (e 为自然对数的底数), 且

$f(3) = 12e^3$, 则不等式 $f(x) < 4xe^x$ 的解集为 _____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知角 α 的顶点与坐标原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

(1) 求 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 若角 α, β ($0 < \alpha \leq \frac{3\pi}{4}, 0 < \beta \leq \frac{3\pi}{4}$) 满足 $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$, 求角 β 的值.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx + 3$, 其导函数 $f'(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 且 $f(1) = -\frac{2}{3}$.

(1) 求实数 m, n 的值;

(2) 若函数 $y = f(x) - \lambda$ 的图象与 x 轴有三个不同的交点, 求实数 λ 的取值范围.

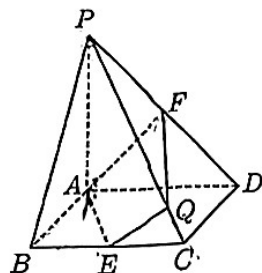
19. (12分) 已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x (\cos \omega x - \sqrt{3} \sin \omega x) + \sqrt{3}$ ($\omega > 0$).

(1) 若 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{24}\right]$ 上单调递增, 求正数 ω 的取值范围;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a=2, \omega=2, f\left(\frac{A}{4}\right)=\sqrt{3}$, D, E, H 为 BC 边上的点. 从以下给出的 3 个条件中选择其中 1 个条件, 并根据所选择的条件判断是否存在满足条件的三角形? 若存在, 求出 $\triangle ABC$ 的周长; 若不存在, 请说明理由 (若多种选择作答, 则按第一种解答给分).

① BC 边的中线 $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ② A 角的角平分线 $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ③ BC 边的垂线 $AH = \frac{3}{2}$.

20. (12分) 如图, 在底面是菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\angle ABC = 60^\circ$, $PA = AB = 2$, 点 E, F 分别为 BC, PD 的中点, 设直线 PC 与平面 AEF 交于点 Q .



(1) 已知平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = l$, 求证: $AB \parallel l$.

(2) 求直线 AQ 与平面 PCD 所成角的正弦值.

21. (12分) 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 和点 $B(0, 1)$.

(1) 斜率为 k 且过原点的直线与双曲线 C 交于 E, F 两点, 求 $\angle EBF$ 最小时 k 的值.

(2) 过点 B 的动直线与双曲线 C 交于 P, Q 两点, 若曲线 C 上存在定点 A , 使 $k_{AP} + k_{AQ}$ 为定值 λ , 求点 A 的坐标及实数 λ 的值.

22. (12分) 设函数 $f(x) = x^2 - ax + \ln x$.

(1) 若当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得极值, 求 a 的值以及函数 $f(x)$ 的单调区间;

(1) 若当 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 时, 证明: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{4}{a} - \frac{a}{2}$

命题人: 马浚 金雷
审题人: 王银川 桂军