

西南大学附中 2022 - 2023 学年度上期期中考试

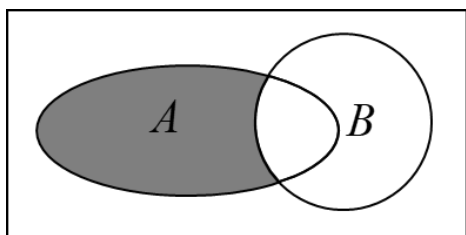
高一数学试题

注意事项:

1. 答题前考生务必把自己的拉名. 准考证号填互各是卡上.
2. 回答这择题时用 2B 的乙格各是卡上对已是口的答案长号涂黑: 回答非选择题时, 用 05 毫米签字笔件签写在答题卡上. 日狂本式互上无效.
3. 考试结象后, 将答题卡文回 (认题总自己保行, 以各评决).

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 若全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{x \mid x \leq 3\}$, 则图中阴影部分表示的集合为 ()



- A. $\{3, 4, 5, 6\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{4, 5, 6\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意明确图中阴影部分表示的含义, 即可根据集合的运算求得答案.

【详解】由题意知: 图中阴影部分表示 $(\complement_U B) \cap A$, 而 $\complement_U B = \{x \mid x > 3\}$,

故 $(\complement_U B) \cap A = \{4, 5, 6\}$,

故选: D.

2. 已知 $f(2x+1) = 2x^2 + 3$. 则 $f(3) =$ ()

- A. 5 B. 11 C. 18 D. 21

【答案】A

【解析】

【分析】由题意可知, 将 $x = 1$ 代入 $f(2x+1) = 2x^2 + 3$ 中, 即可求得答案.

【详解】由题意令 $2x+1 = 3$, 则 $x = 1$,

故 $f(3) = 2 \times 1^2 + 3 = 5$,

故选: A.

3. 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $C = \{z \mid z = x + y, x \in A, y \in B\}$ 的真子集个数为 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】先根据集合 C 的定义和集合中元素的互异性写出集合, 然后根据真子集的性质求解.

【详解】依题意 $C = \{3, 4, 5\}$, 集合 C 中有 3 个元素, 则其真子集的个数有 $2^3 - 1 = 7$ 个.

故选: C

4. 已知 $-1 < x < 2$, $0 < y < 6$, 则 $2x - y$ 的取值范围是 ()

A. $-2 < 2x - y < 10$

B. $-8 < 2x - y < 4$

C. $-8 < 2x - y < 6$

D. $-4 < 2x - y < 8$

【答案】B

【解析】

【分析】先求 $2x$ 的范围,再求 $2x - y$ 的范围.【详解】因为 $-1 < x < 2$, 所以 $-2 < 2x < 4$,而 $0 < y < 6$, 所以 $-8 < 2x - y < 4$.

故选:B

5. 函数 $f(x) = x^2 + 2(1 - m)x + 3$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上单调递减, 则 m 的取值范围是 ()

A. $[-3, +\infty)$

B. $[5, +\infty)$

C. $(-\infty, 5]$

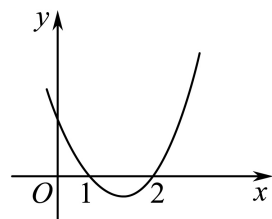
D. $(-\infty, -3]$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数的性质列不等式,由此求得 m 的取值范围,【详解】二次函数 $f(x) = x^2 + 2(1 - m)x + 3$ 的开口向上, 对称轴 $x = -\frac{2(1 - m)}{2} = m - 1$,由于 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上单调递减, 所以 $m - 1 \geq 4, m \geq 5$,即 m 的取值范围是 $[5, +\infty)$.

故选:B

6. 函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示. 则不等式 $\frac{cx + a}{ax + b} < 0$ 的解集是 ()

A. $\{x | -3 < x < -\frac{1}{2}\}$

B. $\{x | -3 < x < 2\}$

C. $\{x | x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 3\}$

D. $\{x | -\frac{1}{2} < x < 3\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由图可知方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根分别为 1 和 2, 且 $a > 0$, 然后利用根与系数的关系表示出 b , c , 代入 $\frac{cx + a}{ax + b} < 0$ 中化简求解可得答案.【详解】由图可知方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根分别为 1 和 2, 且 $a > 0$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1 + 2 = -\frac{b}{a} \\ 1 \times 2 = \frac{c}{a} \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} b = -3a \\ c = 2a \end{cases}, \text{ 且 } a > 0,$$

$$\text{所以 } \frac{cx + a}{ax + b} < 0 \text{ 可化为 } \frac{2ax + a}{ax - 3a} < 0,$$

$$\text{所以 } \frac{2x + 1}{x - 3} < 0,$$

$$\text{所以 } (2x + 1)(x - 3) < 0, \text{ 解得 } -\frac{1}{2} < x < 3,$$

所以不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 3\right\}$,

故选:D

7. $y = 1 + x + \sqrt{1 - 2x}$ 的值域是 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, \frac{15}{8}]$ C. $[\frac{3}{2}, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】先由根式求得函数的定义域,再用换元法将函数转化为二次函数,由此利用二次函数的值域的求法即可求得函数的值域.

【详解】因为函数 $y = 1 + x + \sqrt{1 - 2x}$, 所以 $1 - 2x \geq 0$, 则 $x \leq \frac{1}{2}$,

令 $t = \sqrt{1 - 2x} (t \geq 0)$, 则 $x = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$, 所以 $y = 1 + x + \sqrt{1 - 2x} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} + t = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{3}{2}$,

因为 $y = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{3}{2}$ 开口向下, 对称轴为 $t = -\frac{1}{2 \times (-\frac{1}{2})} = 1$,

所以 $y = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{3}{2}$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

故 $y = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{3}{2}$ 在 $x = 1$ 处取得最大值为 $y = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 2$, 最小值为负无穷,

所以 $y = 1 + x + \sqrt{1 - 2x}$ 的值域为 $(-\infty, 2]$.

故选:A.

8. 已知偶函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = \frac{2-x}{x+1}$, 则 $f(x-1) < \frac{1}{2}$ 的解集为 ()

- A. $(0, 2)$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
C. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数奇偶性和单调性之间的关系,即可得到结论.

【详解】解: 当 $x \in [0, +\infty)$ 时,

$$f(x) = \frac{2-x}{x+1} = \frac{3-(x+1)}{x+1} = \frac{3}{x+1} - 1,$$

当 x 增大时, $\frac{3}{x+1}$ 减小, $\frac{3}{x+1} - 1$ 减小,

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

因为 $f(x)$ 是偶函数,

所以 $f(x-1) = f(|x-1|) < \frac{1}{2} = f(1)$,

$\therefore |x-1| \geq 0$,

$\therefore |x-1| > 1$,

解得: $x > 2$ 或 $x < 0$.

故选:C.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是 ()

A. $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = x$ 是同一个函数

B. 若函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[1, 4]$, 则函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2, 5]$

C. 函数 $y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值是 2

D. 已知 $p: x > a$ 是 $q: 2 < x < 3$ 的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是 $a \leq 2$

【答案】BD

【解析】

【分析】化简函数解析式判断 A, 根据抽象函数的定义域判断 B, 化简并换元后根据对勾函数的单调性判断 C, 根据必要不充分条件转化为集合的真子集关系求解.

【详解】对于 A, $y = \sqrt{x^2} = |x|$ 与 $y = x$ 的解析式不同, 不是同一个函数, 故错误;

对于 B, 函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[1, 4]$, 所以 $2 \leq x+1 \leq 5$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $[2, 5]$, 故正确;

对于 C, $y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$, 令 $t = \sqrt{x^2+4} \geq 2$, 则 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递

增, 所以当 $x=0, t=2$ 时, $y_{\min} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, 故错误;

对于 D, 设 $A = (a, +\infty)$, $B = (2, 3)$, 由 p 是 q 的必要不充分条件知 $B \not\subseteq A$, 所以 $a \leq 2$, 故正确.

故选: BD

10. 若 $a > b > 0, c \in \mathbb{R}$, 则下列不等式一定成立的是 ()

A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. $ac^2 > bc^2$

C. $\frac{b}{a} < \frac{b+1}{a+1}$

D. $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$

【答案】AC

【解析】

【分析】根据不等式的性质或作差法判断大小关系.

【详解】对于 A: 因为 $a > b > 0$, 所以 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} < 0$, 故 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 故 A 正确;

对于 B: 当 $c=0$ 时, 不成立, 故 B 错误;

对于 C: 因为 $a > b > 0$, 所以 $\frac{b}{a} - \frac{b+1}{a+1} = \frac{b(a+1) - a(b+1)}{a(a+1)} = \frac{b-a}{a(a+1)} < 0$, 故 C 正确;

对于 D: 因为 $a > b > 0$, 所以 $a + \frac{1}{a} - (b + \frac{1}{b}) = a - b + \frac{b-a}{ab} = (a-b) \frac{ab-1}{ab}$ 不能判断正确, 故 $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$ 大小不能确定, 故 D 错误.

故选: AC.

11. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 且满足下列条件:

① 对任意的实数 $x > 0, y > 0$, 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2$;

② 对任意的实数 $x > 0$, 都有 $f(x) > -2$;

③ $f(1) = -1$. 则下列说法正确的有 ()

A. $f(2) = 0$

B. $f(0) = -2$

C. 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

D. 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】选项 A, 令 $x = y = 1$, 代入求解即可判定; 选项 B, 由函数 $f(x)$ 是奇函数, 可判定; 选项 C, 任取 $x_1 > x_2 > 0$, $f(x_1) = f(x_2) + f(x_1 - x_2) + 2$, 结合 $x_1 - x_2 > 0$, $f(x_1 - x_2) > -2$ 即可判定; 选项 D, 结合函数 $f(x)$ 的单调性, 以及 $f(2) = 0$, 即可求解判定.

【详解】选项 A, 令 $x = y = 1$, $f(2) = f(1) + f(1) + 2 = 0$, 正确;

选项 B, 由函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, $f(0) = 0$, 错误;

选项 C, 任取 $x_1 > x_2 > 0$, $f(x_1) = f(x_2) + f(x_1 - x_2) + 2$,

即 $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) + 2$, 又 $x_1 - x_2 > 0$, 故 $f(x_1 - x_2) > -2$,

故 $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) + 2 > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 即函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 错误;

选项 D, 由选项 B, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也单调递增, 又 $f(2) = 0$, 故当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$ 的解为 $x > 2$, 当 $x < 0$ 时, 由 $f(-2) = -f(2) = 0$, $f(x) > 0$ 的解为 $-2 < x < 0$, 故不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, 错误.

故选: A

12. $f(x) = \min\{|2x - 3|, x^2, |2x + 3|\}$, 其中 $\min\{x, y, z\}$ 表示 x, y, z 中的最小者, 下列说法正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 为偶函数

B. 若 $f(x) = k|x|$ 有 7 个根, 则 $0 < k \leq 1$

C. 当 $x \in (-\infty, -\frac{3}{4}]$ 时, 有 $f(x + \frac{3}{2}) \leq f(x)$

D. 当 $x \in [-3, 3]$ 时, $f[f(x)] \leq f(x)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】A 选项, 画出 $f(x) = \min\{|2x - 3|, x^2, |2x + 3|\}$ 的图象, 得到 $f(x) = \begin{cases} |2x + 3|, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ |2x - 3|, & x > 1 \end{cases}$, 从

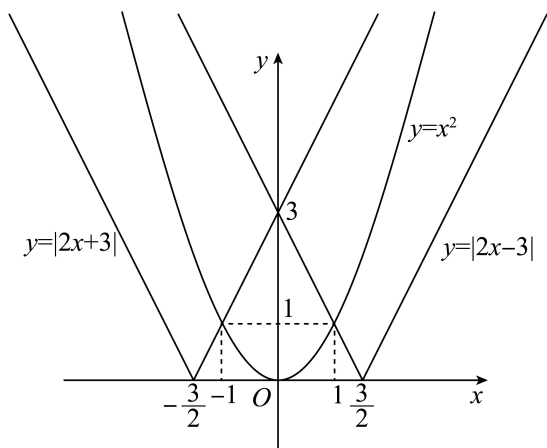
而根据函数奇偶性定义进行判断;

B 选项, 在同一坐标系内画出 $y = k|x|$ 与 $f(x)$ 的图象, 数形结合得到 $0 < k < 1$, B 错误;

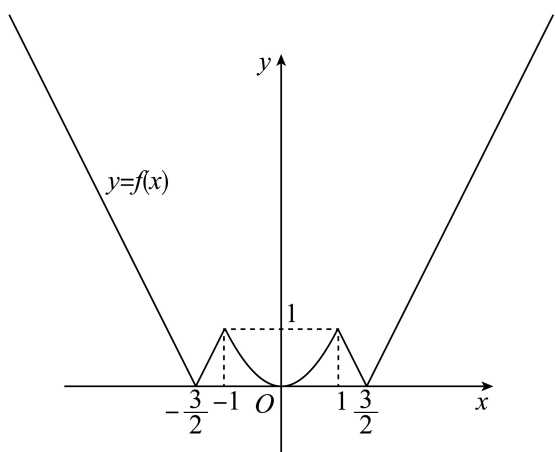
C 选项, 将 $f(x + \frac{3}{2})$ 与 $f(x)$ 的图象画在同一坐标系内, 数形结合得到答案;

D 选项, 观察图象得到当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x) \leq x$, 令 $t = f(x)$, 由题意可知: $t \in [0, 3]$, 故 $f[f(x)] \leq f(x)$.

【详解】在同一直角坐标系中, 作出 $y = |2x - 3|$, $y = x^2$, $y = |2x + 3|$ 的函数图象, 如图所示:



则 $f(x) = \min\{|2x-3|, x^2, |2x+3|\}$ 的图象如下:



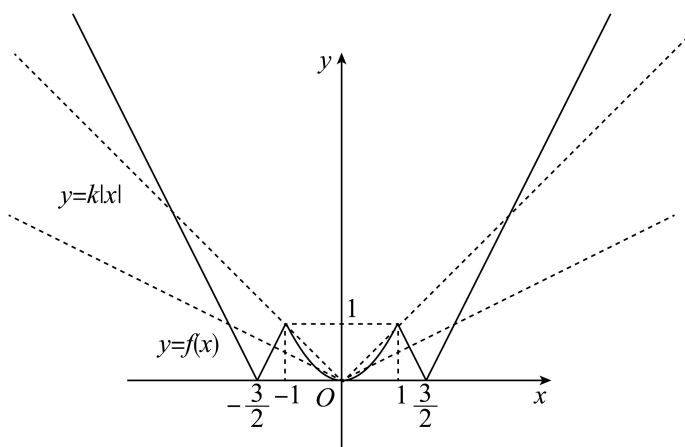
从图象可知:
$$f(x) = \begin{cases} |2x+3|, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ |2x-3|, & x > 1 \end{cases}$$

当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$,

当 $x < -1$ 时, $-x > 1$, 故 $f(-x) = |-2x-3| = |2x+3| = f(x)$,

故 $f(x)$ 为偶函数, A 正确;

在同一坐标系内画出 $y=k|x|$ 与 $f(x)$ 的图象,



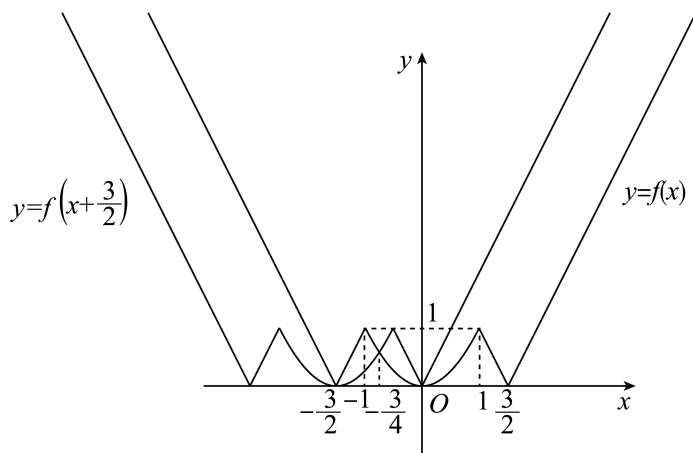
显然当 $y=k|x|$ 经过点 $(1, 1)$ 时, 即 $k=1$ 时, 两函数图象有 5 个交点,

数形结合, 要想 $f(x) = k|x|$ 有 7 个根, 则 $0 < k < 1$, B 错误;

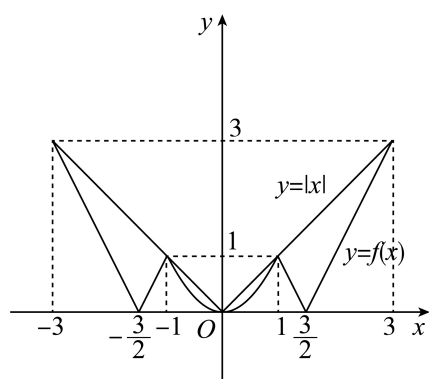
当 $x \in \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ 时, $x + \frac{3}{2} \in (-1, 1]$, 故 $f\left(x + \frac{3}{2}\right) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$,

令 $x^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$, 解得: $x = -\frac{3}{4}$, 将 $f\left(x + \frac{3}{2}\right)$ 与 $f(x)$ 的图象画在同一坐标系内,

数形结合可得: 当 $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right]$ 时, 有 $f\left(x + \frac{3}{2}\right) \leq f(x)$, C 正确;



从 $f(x)$ 的图象可以看出, 当 $x \in [-3, 3]$ 时, $f(x) \leq |x|$, 即当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x) \leq x$, 令 $t = f(x)$, 由题意可知: $t \in [0, 3]$, 故 $f[f(x)] \leq f(x)$, D 正确.



故选: ACD

三、填空题, 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$ 的定义域为 _____.

【答案】 $[-2, 0) \cup (0, +\infty)$

【解析】

【分析】此题考查函数的定义域, 根据分母不为 0 和被开方数大于等于 0 即可得到结果.

【详解】要使函数有意义, 则 $\begin{cases} x \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$, 即 $x \geq -2$ 且 $x \neq 0$,

$\therefore f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$ 的定义域为 $[-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

故答案为: $[-2, 0) \cup (0, +\infty)$

14. 不等式 $1 - \frac{1}{x} > 0$ 的解集是 _____.

【答案】 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

【解析】

【分析】通分后转化为一元二次不等式求解.

【详解】不等式 $1 - \frac{1}{x} > 0$ 化为 $\frac{x-1}{x} > 0$, 所以 $x(x-1) > 0$, $x < 0$ 或 $x > 1$.

所以不等式的解集为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

故答案为: $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

15. 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq a\}$, 集合 $B = \{x | m^2 + 2 \leq x \leq m^2 + 4\}$, 如果命题“ $\exists m \in R, A \cap B \neq \emptyset$ ”为假命题, 则实数 a 的取值范围为 _____.

【答案】 $(-\infty, 2)$

【解析】

【分析】根据题意, 将命题等价转化为命题“ $\forall m \in R, A \cap B = \emptyset$ ”为真命题, 根据命题的真假得出关于 m 的不等式恒成立, 进而求解即可.

【详解】因为命题“ $\exists m \in R, A \cap B \neq \emptyset$ ”为假命题,

所以命题“ $\forall m \in R, A \cap B = \emptyset$ ”为真命题,

因为集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq a\}$, 当 $a < 0$ 时, 集合 $A = \emptyset$, 符合 $A \cap B = \emptyset$;

当 $a \geq 0$ 时, 因为 $m^2 + 2 \geq 2$, 所以由对 $\forall m \in R, A \cap B = \emptyset$, 可得 $m^2 + 2 > a$ 对任意的 $m \in R$ 恒成立, 所以 $0 \leq a < 2$,

综上所述: 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2)$,

故答案为: $(-\infty, 2)$.

16. 已知 $x > 0, y > 0, z > 0$, 则 $\frac{(x^2 + 2y^2 + z^2)^2 + 1}{xy + 3yz}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】化简原式为 $\frac{\left[\left(x^2 + \frac{y^2}{5}\right) + \left(\frac{9y^2}{5} + z^2\right)\right]^2 + 1}{xy + 3yz}$, 再利用基本不等式求解.

【详解】原式 = $\frac{\left[\left(x^2 + \frac{y^2}{5}\right) + \left(\frac{9y^2}{5} + z^2\right)\right]^2 + 1}{xy + 3yz} \geq \frac{\left(2\sqrt{x^2 \cdot \frac{y^2}{5}} + 2\sqrt{\frac{9y^2}{5} \cdot z^2}\right)^2 + 1}{xy + 3yz}$

(当且仅当 $y = \sqrt{5}x, \sqrt{5}z = 3y$ 时等号成立)

= $\frac{\frac{4}{5}(xy + 3yz)^2 + 1}{xy + 3yz} \geq \frac{2\sqrt{\frac{4}{5}(xy + 3yz)^2 \cdot 1}}{xy + 3yz} = \frac{4}{5}\sqrt{5},$

(当且仅当 $xy + 3yz = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时等号成立)

综合得当 $x = \frac{\sqrt{5}}{10}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{3}{10}\sqrt{5}$ 时, 原式取到最小值 $\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

故答案为: $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知不等式 $ax^2 + (a-b)x + 1-a < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 1\right\}$.

(1) 求实数 a, b 的值

(2) 若 $m > 0, n > 0$, 且 $am + bn = 1$, 求 $\frac{2}{n} + \frac{n}{m}$ 的最小值.

【答案】(1) $a = 2, b = 3$

(2) 10

【解析】

【分析】(1) 由解集可得一元二次不等式的两个解, 有韦达定理可求得实数 a, b 的值.

(2) 由 (1) 可知 a, b 的值, 利用基本不等式求得 $\frac{2}{n} + \frac{n}{m}$ 的最小值.

【小问 1 详解】

由不等式 $ax^2 + (a-b)x + 1-a < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 1\right\}$ 可得 $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$. 所以

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{a-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1-a}{a} \end{cases}, \text{代入得} \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}.$$

当 $a = 2, b = 3$ 时, $ax^2 + (a-b)x + 1-a < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 1\right\}$, 符合题意.

所以 $a = 2, b = 3$.

【小问 2 详解】

由 (1) 可知 $a = 2, b = 3$, 所以 $2m + 3n = 1$, 由 $m > 0, n > 0$, 所以 $\frac{2}{n} + \frac{n}{m} = \frac{2(2m+3n)}{n} + \frac{n}{m} =$

$4\frac{m}{n} + 6 + \frac{n}{m} \geq 6 + 2\sqrt{4\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m}} = 10$. 当且仅当

$4\frac{m}{n} = \frac{n}{m}$, 即 $m = \frac{1}{8}, n = \frac{1}{4}$ 时等号成立. 所以 $\frac{2}{n} + \frac{n}{m}$ 的最小值为 10.

18. 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{3x-1}{x+1} < 2\right\}, B = \{x \mid m-1 < x < 2m+1\}$.

(1) 若 $m = 2$ 时, 求 $A \cap B, A \cup B$;

(2) 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $A \cap B = \{x \mid 1 < x < 3\}, A \cup B = \{x \mid -1 < x < 5\}$.

(2) $m \in (-\infty, -2] \cup [0, 1]$

【解析】

【分析】(1) 先解分式不等式 $\frac{3x-1}{x+1} < 2$, 再求交集和并集即可;

(2) 分 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 两类情况讨论即可.

【小问 1 详解】

由 $\frac{3x-1}{x+1} < 2$ 得, $\frac{3x-1}{x+1} - 2 < 0$,

即 $\frac{3x-1}{x+1} - \frac{2x+2}{x+1} < 0$, 即 $\frac{x-3}{x+1} < 0$,

所以 $(x-3)(x+1) < 0$, 解得: $-1 < x < 3$,

所以 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$,

当 $m = 2$ 时, $B = \{x \mid 1 < x < 5\}$,

所以 $A \cap B = \{x \mid 1 < x < 3\}, A \cup B = \{x \mid -1 < x < 5\}$.

【小问 2 详解】

若 $A \cup B = A$, 则 $B \subseteq A$,

①若 $B = \emptyset$, 则 $m - 1 \geq 2m + 1$, 即 $m \leq -2$.

②若 $B \neq \emptyset$, 则有 $\begin{cases} 2m + 1 \leq 3 \\ m - 1 \geq -1 \\ m - 1 < 2m + 1 \end{cases}$, 解得 $0 \leq m \leq 1$.

综上: $m \in (-\infty, -2] \cup [0, 1]$.

19. 已知定义在 R 上的函数满足: $f(x) + 2f(-x) = x^2 - 2x + 3$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(2) 若不等式 $f(x) \leq 2ax - 1$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立. 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$

(2) $a \geq \frac{13}{6}$

【解析】

【分析】(1) 利用方程组法求函数解析式即可;

(2) 该不等式是一个一元二次不等式, 其对应的函数开口向上, 要使 $f(x) \leq 2ax - 1$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立, 只需对应函数两个端点满足即可.

【小问1详解】

将 $f(x) + 2f(-x) = x^2 - 2x + 3$ 的 x 替换为 $-x$ 得 $f(-x) + 2f(x) = x^2 + 2x + 3$,

$$\text{联立} \begin{cases} f(x) + 2f(-x) = x^2 - 2x + 3 \\ f(-x) + 2f(x) = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$$

解得 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$

【小问2详解】

不等式 $f(x) \leq 2ax - 1$ 为 $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1 \leq 2ax - 1$, 化简得 $\frac{1}{3}x^2 + (2 - 2a)x + 2 \leq 0$,

要使其在 $[1, 3]$ 上恒成立, 则 $\begin{cases} \frac{1}{3} + (2 - 2a) + 2 \leq 0 \\ \frac{1}{3} \times 3^2 + (2 - 2a) \times 3 + 2 \leq 0 \end{cases}$,

解得 $a \geq \frac{13}{6}$.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{4x + a - b}{ax^2 + 9}$ 定义在 $(-3, 3)$ 上的奇函数, 且 $f(1) = \frac{2}{5}$.

(1) 求 a, b ;

(2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(-3, 3)$ 上的单调性并加以证明;

(3) 解不等式 $f(-x^2 + x - 1) + f(x + 1) \geq 0$.

【答案】(1) $a = b = 1$

(2) 见解析 (3) $[0, 2)$

【解析】

【分析】(1) 由已知结合奇函数的性质及 $f(1) = \frac{2}{5}$ 代入即可求解 a, b ;

(2) 结合函数的单调性的定义即可判断;

(3) 结合函数的单调性及奇偶性即可求解.

【小问1详解】

\therefore 函数 $f(x) = \frac{4x+a-b}{ax^2+9}$ 定义在 $(-3,3)$ 上的奇函数. 且 $f(1) = \frac{2}{5}$,

$$\therefore f(0) = \frac{a-b}{9} = 0, \text{ 且 } f(1) = \frac{4+a-b}{a+9} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore a=b=1;$$

【小问2详解】

由(1)知, $f(x) = \frac{4x}{x^2+9}$, $f(x)$ 在 $(-3,3)$ 上单调递增,

理由如下: 设 $-3 < x_1 < x_2 < 3$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{4x_1}{9+x_1^2} - \frac{4x_2}{9+x_2^2} = \frac{4(9-x_1x_2)(x_1-x_2)}{(9+x_1^2)(9+x_2^2)},$$

$$\therefore -3 < x_1 < x_2 < 3, \therefore (9+x_1^2)(9+x_2^2) > 0, 9-x_1x_2 > 0, x_1-x_2 < 0,$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2),$$

所以 $f(x)$ 在 $(-3,3)$ 上的单调递增;

【小问3详解】

$$\therefore f(-x^2+x-1) + f(x+1) \geq 0,$$

$$\therefore f(x+1) \geq -f(-x^2+x-1), \text{ 又 } f(x) \text{ 为奇函数},$$

$$\therefore f(x+1) \geq f(x^2-x+1), \text{ 又 } f(x) \text{ 在 } (-3,3) \text{ 上的单调递增},$$

$$\therefore \begin{cases} -3 < x+1 < 3 \\ -3 < -x^2+x-1 < 3, \text{ 解得 } 0 \leq x < 2, \\ x+1 \geq x^2-x+1 \end{cases}$$

故不等式的解集为 $[0,2)$.

21. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

(1) 求 $f(\frac{1}{2})$, $f(f(1))$ 的值;

(2) 当 $x < 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(3) 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = kx$ 四个不同的交点, 求实数 k 的取值范围.

【答案】(1) $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$, $f(f(1)) = -3$.

$$(2) f(x) = x^2 + 4x + 1$$

$$(3) (-2, 2)$$

【解析】

【分析】(1) 根据题意, 由函数的解析式, 将 $x = \frac{1}{2}$ 代入函数解析式即可得 $f(\frac{1}{2})$ 的值, 同理可得 $f(1)$ 的值, 利用函数的奇偶性分析可得 $f(f(1))$ 的值;

(2) 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$, 由函数的解析式分析 $f(-x)$ 的解析式, 进而由函数的奇偶性分析可得答案;

(3) 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = kx$ 四个不同的交点, 则函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有四个不同的交点, 由数形结合法分析即可得答案.

【小问1详解】

根据题意, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 4x + 1$,

$$\text{则 } f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - 2 + 1 = -\frac{3}{4}, f(1) = 1 - 4 + 1 = -2,$$

又由函数 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(2) = f(-2)$,

$$\therefore f(f(1)) = f(-2) = f(2) = 4 - 8 + 1 = -3;$$

【小问2详解】

设 $x < 0$, 则 $-x > 0$,

$$\text{则有 } f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 1 = x^2 + 4x + 1,$$

又由函数 $f(x)$ 为偶函数,

$$\text{则 } f(x) = f(-x) = x^2 + 4x + 1,$$

则当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 + 4x + 1$;

【小问3详解】

由 (2) 可知, $f(x) = x^2 - 4|x| + 1$,

函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = kx$ 四个不同的交点,

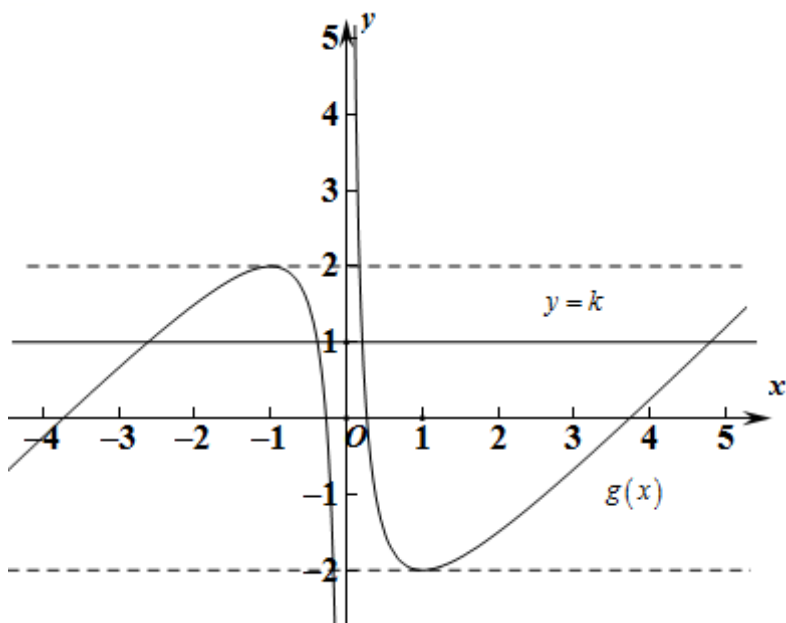
即方程 $x^2 - 4|x| + 1 = kx$ 有四个不等的实根,

$$\text{又 } x = 0 \text{ 不适合上式, } \therefore x + \frac{1}{x} - 4\frac{|x|}{x} = k,$$

$$\text{记 } g(x) = x + \frac{1}{x} - 4\frac{|x|}{x} = \begin{cases} x + \frac{1}{x} - 4, & x > 0 \\ x + \frac{1}{x} + 4, & x < 0 \end{cases},$$

问题等价于函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y = k$ 有四个不同的交点,

作出二者图象,



由图象可知, $-2 < k < 2$,

\therefore 实数 k 的取值范围 $(-2, 2)$.

22. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3$.

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最小值为 $g(a)$, 求函数 $g(a)$ 的表达式;

(2) 若 $g(a) = 2$. 关于 x 的方程 $f\left(x + \frac{4}{|x|}\right) - k\left(x + \frac{4}{|x|}\right) + 2k + 1 = 0$ 有两个不等的实根, 求实数 k 的取值范围.

【答案】(1) $g(a) = \begin{cases} -2a+4, & a < 1 \\ -a^2+3, & 1 \leq a \leq 2 \\ -4a+7, & a > 2 \end{cases}$

(2) $(-\infty, -2) \cup \{6\}$

【解析】

【分析】(1) 由二次函数的图像性质, 比较对称轴 $x=a$ 与 $[1, 2]$ 的关系, 分别讨论 $a < 1$ 、 $1 \leq a \leq 2$ 、 $a > 2$ 即可;

(2) 由 $g(a) = 2$ 得 $a = 1$, 令 $t = x + \frac{4}{|x|}$, 讨论 $x < 0$ 、 $x > 0$ 时 t 的单调性, 则原命题等价于关于 t 的方程 $t^2 - (k+2)t + 2k+4 = 0$ 的根满足 $t_1 = t_2 = 4$ 或 $t_1 < t_2 < 4$,

$t_1 = t_2 = 4$ 时可直接代入方程求出 k ; $t_1 < t_2 < 4$ 时列式 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_2 < 4 \end{cases}$ 求解即可

【小问1详解】

二次函数的对称轴为 $x=a$, 开口向上,

i. 当 $a < 1$ 时, 最小值 $g(a) = f(1) = -2a + 4$;

ii. 当 $1 \leq a \leq 2$ 时, 最小值 $g(a) = f(a) = -a^2 + 3$;

iii. 当 $a > 2$ 时, 最小值 $g(a) = f(2) = -4a + 7$

综上, $g(a) = \begin{cases} -2a+4, & a < 1 \\ -a^2+3, & 1 \leq a \leq 2 \\ -4a+7, & a > 2 \end{cases}$

【小问2详解】

由 $g(a) = 2$ 得 $a = 1$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$, 令 $t = x + \frac{4}{|x|}$, 故 $f(t) - kt + 2k + 1 = t^2 - (k+2)t + 2k + 4 = 0$,

当 $x < 0$ 时, $t = x - \frac{4}{x}$ 为增函数, 故 $t \in (-\infty, +\infty)$; 当 $x > 0$ 时, $t = x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ ($x = \frac{4}{x}$ 即 $x = 2$ 时取等号), 故 t 在 $(0, 2)$ 单调递减, $(2, +\infty)$ 单调递增.

根据 t 的单调性, 关于 x 的方程 $f\left(x + \frac{4}{|x|}\right) - k\left(x + \frac{4}{|x|}\right) + 2k + 1 = 0$ 有两个不等的实根等价于关于 t 的方程 $t^2 - (k+2)t + 2k + 4 = 0$ 的根满足 $t_1 = t_2 = 4$ 或 $t_1 < t_2 < 4$.

i. 当 $t_1 = t_2 = 4$ 时, 代入方程可得 $k = 6$;

ii. 当 $t_1 < t_2 < 4$ 时, 有 $\begin{cases} \Delta = (k+2)^2 - 4(2k+4) > 0 \\ t_2 = \frac{k+2+\sqrt{\Delta}}{2} < 4 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} (k+2)(k-6) > 0 \\ \sqrt{(k+2)(k-6)} < 6-k \\ 6-k > 0 \end{cases}$ 解得 $k < -2$.

综上, 实数 k 的取值范围为 $(-\infty, -2) \cup \{6\}$

【点睛】求函数 $f(g(x)) = 0$ 根的个数问题, 一般采取换元法, 令 $t = g(x)$, 则根的个数转化为 $f(t)$ 与 t , t 与 x 的对应关系问题, 再分别讨论即可