重庆市育才中学校高2024届2022-2023学年（上）期末考试

数学 试题

（满分150分，考试时间120分钟）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。

注意事项：1．答卷前，考生自行打印试卷及答题卡，请考生务必把自己的姓名、准考证号填写在答题卡上；

2．作答时，务必将答案写在答题卡上，写在本试卷及草稿纸上无效；

3．在规定时间内，将答题卡逐题竖屏拍照提交。

第Ⅰ卷

一、单项选择题(本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求。)

1．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_8=4$，则$a_2a_3a_4a_5a_6a_7$等于（　　）

A．32　　B．64　　C．128　　D．256

2．双曲线$C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$上的点$P$到左焦点的距离为9，则点$P$到右焦点的距离为（　　）

A．3　　B．15　　C．15或3　　D．10

3．设函数$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=4x-3$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$（　　）

A．4　　B．2　　C．1　　D．-3

4．数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$，$a_1=3$，则$a_{2023}=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{5}{2}$　　D．3

5．已知抛物线C：$y^2=-4x$，直线l过定点$P(0,1)$，与C仅有一个公共点的直线l有（　　）条

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．已知$a_1=2$，$a_n=n(a_{n+1}-a_n)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=$（　　）

A．n　　B．$n+1$　　C．$2n$　　D．$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

7．我国古代数学典籍《四元玉鉴》中有如下一段话："河有汛，预差夫一千八百八十人筑堤，只云初日差六十五人，次日转多七人，今有三日连差三百人，问已差人几天，差人几何？"其大意为"官府陆续派遣1880人前往修筑堤坝，第一天派出65人，从第二天开始每天派出的人数比前一天多7人．已知最后三天一共派出了300人，则目前一共派出了多少天，派出了多少人？"（　　）

A．6天 495人　　B．7天 602人

C．8天 716人　　D．9天 795人

8．已知圆C：$(x-5)^2+(y-12)^2=1$和两点$A(0,-m)$，$B(0,m)(m>0)$，若圆C上存在点P，使得$\angle APB=90°$，则m的最小值为（　　）

A．14　　B．13　　C．12　　D．11

二、多项选择题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合要，求全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。)

9．已知等差数列 10，7，4，…，则（　　）

A．该数列的通项公式为 $a_n=-3n+13$　　B．-25 是该数列的第 13 项

C．该数列的前 5 项和最大　　D．设该数列为 $\{a_n\}$，则 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_8|=48$

10．已知圆 M：$x^2+y^2-2x-3=0$，则下列说法正确的是（　　）

A．点 $(2,0)$ 在圆 M 内　　B．圆 M 关于 $x+y-1=0$ 对称

C．半径为 $\sqrt{3}$　　D．直线 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 与圆 M 的相交所得弦长为 $2\sqrt{3}$

11．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots\cdots+(2n-1)a_n=n$，其中 $b_n=\dfrac{a_n}{(2n+1)}$，S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，则下列四个结论中，正确的是（　　）

A．$a_1=1$　　B．数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n=\dfrac{1}{2n+1}$

C．数列 $\{a_n\}$ 为递减数列　　D．若对于任意的 $n\in N^*$ 都有 $S_n<\lambda$，则 $\lambda\ge\dfrac{1}{2}$

12．已知 F_1、F_2 分别为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点，点 $M(-4,0)$ 在直线 l 上，过点 F_2 的直线与双曲线的右支交于 A、B 两点，下列说法正确的是（　　）

A．若直线 l 与双曲线左右两支各一个交点，则直线 l 的斜率范围为 $(-\dfrac{b}{2},\dfrac{b}{2})$

B．点 F_2 到双曲线渐近线的距离为 $\sqrt{b^2+4}$

C．若直线 AB 垂直于 x 轴，且 $\triangle ABM$ 为锐角三角形，则双曲线的离心率取值范围为 $(1,\dfrac{1+\sqrt{13}}{2})$

D．记 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆 I_1 的半径为 r_1，$\triangle BF_1F_2$ 的内切圆 I_2 的半径为 r_2，若 $r_1r_2=4$，则 $b=2\sqrt{3}$

第Ⅱ卷

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。其中 16 题第一空 2 分，第二空 3 分。）

13．已知直线 $l_1:x+ay-1=0$，$l_2:(a+1)x+y+3=0$，若 $l_1\perp l_2$，则实数 $a=$________.

14．已知函数 $f(x)=x\ln x+3x^2-1$，则 $f'(1)=$________.

15．设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 M、N 在 C 上（M 位于第一象限），且点 M、N 关于原点 O 对称，若 $\angle MF_1N=90^\circ$，$2|MF_2|=|NF_2|$，则 C 的离心率为________.

16．已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_n+a_{n+1}=2n$，则 $a_3=$________；高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号．设 $x\in\mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，称 $f(x)=[x]$ 为高斯函数．设 $b_n=[\lg a_n]$，

且数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，则$T_{2022}=$________.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分。17 题 10 分，18 题至 22 题 12 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。）

17．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n-4(n\in \mathrm{N}^*)$.

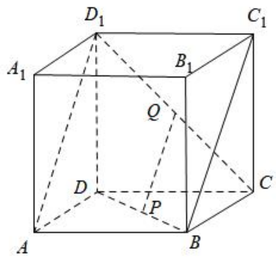
（1）求证：$\{a_n-2\}$是等比数列；

（2）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

18．如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 2，P、Q分别为BD、CD_1的中点.

（1）证明：$PQ//$平面BCC_1B_1；

（2）求直线CD_1与平面ABC_1D_1所成角的大小.



19．已知抛物线$C:y^2=2px(0<p<2)$上一点$P(\frac{1}{p},\sqrt{2})$到抛物线焦点的距离为$\frac{3}{2}$.

（1）求抛物线C的方程；

（2）若直线l：$y=x+m$（m为参数）与抛物线C交于A、B两点，且$OA\perp OB$，求直线l的方程.

20．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_{n+1}=S_n+a_n+1(n\in\mathrm{N}^*)$，________________．请在①$a_3+a_9=14$；②$a_2$，$a_5$，$a_{11}$成等比数列；③$S_8=44$，这三个条件中任选一个补充在上面题干中，并解答下面问题．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，设数列$\{b_n\}$的前n项和T_n，求证：$1\le T_n<3\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

21．在平面五边形$ABCDE$中（如图1），$ABCD$是梯形，$AD\,/\!/\,BC$，$AD=2BC=2$，$AB=\sqrt{3}$，$\angle ABC=90°$，ΔADE是等边三角形．现将ΔADE沿AD折起，连接EB，EC得四棱锥$E-ABCD$（如图2）且$EC=\sqrt{6}$．

（1）求证：平面$EAD\perp$平面$ABCD$；

（2）在棱EB上有点F，满足$\dfrac{EF}{EB}=\dfrac{1}{3}$，求二面角$E-AD-F$的余弦值．

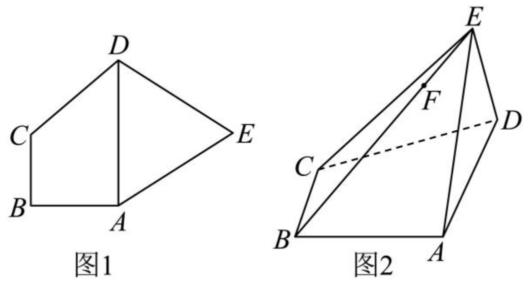


图1　　图2

22．已知O为坐标原点，点$M\left(-\sqrt{2},0\right),N\left(\sqrt{2},0\right)$皆为曲线$\Gamma$上点，$P$为曲线$\Gamma$上异于$M$，$N$的任意一点，且满足直线$PM$的斜率与直线$PN$的斜率之积为$-\dfrac{1}{2}$．

（1）求曲线Γ的方程；

（2）设直线l与曲线Γ相交于A、B两点，直线OA、l、OB的斜率分别为k_1、k、k_2（其中$k>0$），ΔOAB的面积为$S\left(S\ne 0\right)$，以OA、OB为直径的圆的面积分别为S_1、S_2．若k_1、k、k_2恰好构成等比数列，求$\dfrac{3\pi S}{\sqrt{2}S_1+\sqrt{2}S_2}$的取值范围．

命题人：张娜、屈洋、刘诗尧

审题人:陈高明