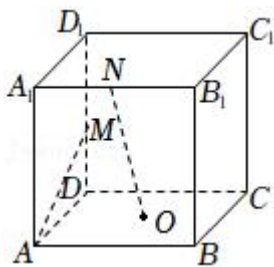


重庆两江育才中学高 2021 级 2022 年秋第一次月考 数学试卷

(时间：120 分钟 满分：150 分)

一、选择题（每小题 5 分，其中 1-8 题为单选，9-12 题为多选，共 60 分）

1. 已知向量 $\vec{a} = (-2 - t, 3)$, $\vec{b} = (-3, -2)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则实数 $t =$ ()
- A. -1 B. 1 C. 0 D. -2
2. 每年的 10 月 10 日为“辛亥革命”纪念日, 某高中欲从高一、高二、高三分别 600 人、500 人、700 人中采用分层抽样法组建一个 36 人的团队参加活动, 则应抽取高三()
- A. 10 人 B. 12 人 C. 14 人 D. 16 人
3. 设 α , β 为两个不同的平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 的一个充分条件可以是 ()
- A. α 内有无数条直线与 β 平行
- B. α , β 垂直于同一条直线
- C. α , β 平行于同一条直线
- D. α , β 垂直于同一个平面
4. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 棱长为 2, O 是底面正方形 $ABCD$ 的中心, 点 M 在 DD_1 上, N 是 A_1B_1 上靠近 A_1 的三等分点, 当直线 ON 与 AM 垂直的时候, DM 的长为 ()



- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{2}$
5. 为名学校甲、乙、丙三名领导到高二 1 班, 高二 2 班, 高二 3 班三个班听课, 每个人只能去一个班, 每个班必须有领导去, 则甲恰好去高二 3 班听课的概率为 ()
- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{3}$

6. 过点 $P(-1, 2)$ 的直线 l 与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点, 且 P 恰好是 AB 的中点, 则 AB 的斜率为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

7. 某圆柱形容器内盛有 8cm 高的水, 若放入三个相同的球 (球的半径与圆柱的底面半径相同) 后, 水恰好淹没最上面的球, 则一个球的体积为 ()



A. $\frac{128}{3}\pi\text{cm}^3$ B. $\frac{256}{3}\pi\text{cm}^3$ C. $\frac{64}{3}\pi\text{cm}^3$ D. $\frac{512}{3}\pi\text{cm}^3$

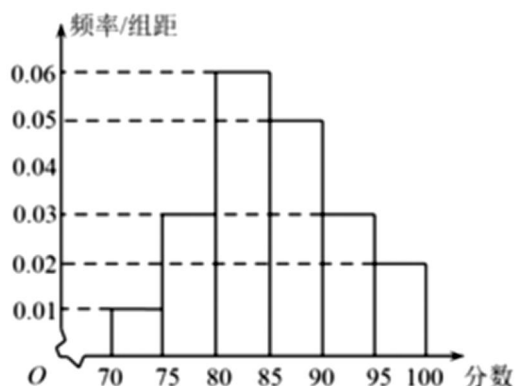
8. 张衡是中国东汉时期伟大的天文学家、数学家, 他曾在数学著作《算罔论》中得出结论: 圆周率的平方除以十六约等于八分之五. 已知在菱形 $ABCD$ 中, $AB=BD=2\sqrt{3}$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 进行翻折, 使得 $AC=2\sqrt{6}$. 按张衡的结论, 三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积约为 ()

A. 72 B. $24\sqrt{10}$ C. $28\sqrt{10}$ D. $32\sqrt{10}$

9. 从装有 2 个红球和 2 个白球的口袋内任取两个球, 则下列选项中的两个事件为不是互斥事件的是 ()

A. 至多有 1 个白球; 都是红球
B. 至少有 1 个白球; 至少有 1 个红球
C. 恰好有 1 个白球; 都是红球
D. 至多有 1 个白球; 全是白球

10. 为落实党中央的“三农”政策, 某市组织该市所有乡镇干部进行了一期“三农”政策专题培训, 并在培训结束时进行了结业考试. 如图是该次考试成绩随机抽样样本的频率分布直方图. 则下列关于这次考试成绩的估计正确的是 ()



- A. 众数为 82.5
- B. 80 百分位数为 91.7
- C. 平均数为 88
- D. 没有一半以上干部的成绩在 80~90 分之间
11. 已知 i 为虚数单位, 下列命题中正确的是 ()
- A. $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$
- B. 复数 $z = \frac{3i}{2+i}$, 则 $|z| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- C. 若复数 $z_1 > z_2$, 则 $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$
- D. 若 $x, y \in \mathbb{C}$, 则 $x+yi=1+i$ 的充要条件是 $x=y=1$
12. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 且满足 $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $|\overrightarrow{OA}| = 1$, 则下列结论中正确的是:
- ()
- A. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{7}{8}$ B. $|\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\angle A = 2\angle C$ D. $\sin \angle A = \frac{1}{4}$

二、填空题 (每小题 5 分, 共 60 分)

13. 已知 O 为坐标原点, 点 $A(1, -2)$, $B(-1, 3)$, 若向量 $\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}$ 与 $\vec{a} = (2, 3)$ 共线, 则实数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 过点 $P(2, 1)$ 且倾斜角是直线 $l: y = x - 1$ 的倾斜角的两倍的直线的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 某圆锥的侧面积是底面积的 2 倍, 则该圆锥的侧面展开图的圆心角为 $\underline{\hspace{2cm}}$

16. 甲、乙两人拿两颗质地均匀的骰子做抛掷游戏. 规则如下: 由一人同时掷两颗骰子, 观察两颗骰子向上的点数之和, 若两颗骰子的点数之和为两位数, 则由原掷骰子的人继续掷; 若掷出的点数之和不是两位数, 就由对方接着掷. 第一次由甲开始掷, 设第 n 次由甲掷的概率为 P_n , 求 $P_3 = \underline{\hspace{2cm}}$, 求 P_n 与 P_{n-1} 的关系, $P_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题 (共 70 分)

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 侧棱 PA 的长为 2, 且 PA 与 AB 、 AD 的夹角都等于 60° , M 是 PC 的中点, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AP} = \vec{c}$.

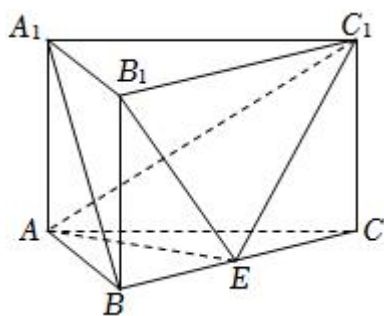
(1) 试用 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 表示向量 \overrightarrow{BM} ;

(2) 求 BM 的长.

18. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, E 为 BC 中点.

(1) 证明: $A_1B \parallel$ 平面 AEC_1 ;

(2) 若此三棱柱的体积为 1, $AB = CC_1 = 1$, $A_1B \perp BC$, 求直线 B_1E 与平面 AEC_1 所成角的正弦值.



19. 已知直线 $l_1: mx - 2y + 1 = 0$, 直线 $l_2: x - (m - 1)y - 1 = 0$.

(I) 若 $l_1 \parallel l_2$, 求 m ;

(II) 当 $0 < m < 1$ 时, 设直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $\frac{1}{k_1} - k_2$ 的最小值.

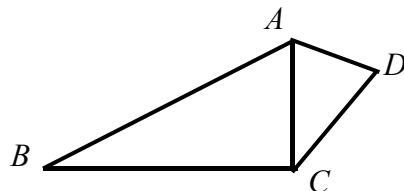
20. 如图, 在四边形 ABCD 中, $CA = CD = \frac{1}{2} AB = 1$, $\sin \angle BCD = \frac{3}{5}$. 且 _____; 在①、②、

③中选一个作为条件, 解答下列问题; ① $AB^2 + AC^2 - BC^2 = AB \cdot AC$; ② $\frac{AC}{\sin B} = 2$; ③

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1;$$

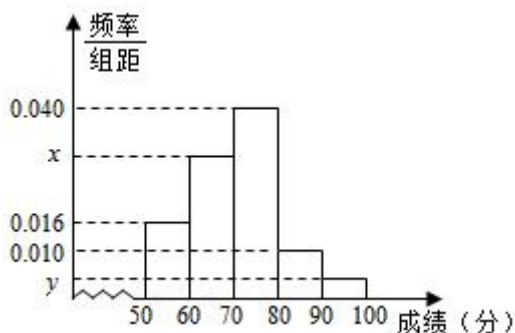
(1) 求四边形 ABCD 的面积;

(2) 求 $\sin D$ 的值。



21. 某校高一举行了一次数学竞赛，为了了解本次竞赛学生的成绩情况，从中抽取了部分学生的分数（得分取正整数，满分为100）作为样本（样本容量为 n ）进行统计，按照 $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$ 的分组作出频率分布直方图，已知得分在 $[50, 60)$, $[90, 100]$ 的频数分别为8, 2.

- (1) 求样本容量 n 和频率分布直方图中的 x , y 的值;
- (2) 估计本次竞赛学生成绩的中位数;
- (3) 在选取的样本中，从竞赛成绩在80分以上（含80分）的学生中随机抽取2名学生，求所抽取的2名学生中至少有一人得分在 $[90, 100]$ 内的概率.



22. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, Q 为 AD 的中点, M 是棱 PC 上的点, $PA = PD = 2$, $BC = \frac{1}{2}AD = 1$, $CD = \sqrt{3}$.

- (1) 求证：平面 $MQB \perp$ 平面 PAD ;
- (2) 若满足 $BM \perp PC$, 求异面直线 AP 与 BM 所成角的余弦值;
- (3) 若二面角 $M-BQ-C$ 大小为 30° , 求 QM 的长.

