

# 重庆育才中学高 2024 届 2022-2023 学年（上）期中考试

## 数学试题

试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写在答题卡上。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写。
3. 在草稿纸、试卷上答题无效。

### 第I卷（选择题）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 直线  $l: \sqrt{6}x + \sqrt{2}y + 3 = 0$  的倾斜角为 ( )  
A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{5\pi}{6}$                       C.  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $\frac{2\pi}{3}$
2. 已知圆的一般方程为  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ ，其圆心坐标是 ( )  
A. (1, 2)                      B. (-1, 2)                      C. (-2, 1)                      D. (-1, -2)
3. 已知中心在坐标原点，焦点在  $x$  轴上的双曲线  $C$  的虚半轴长为 1，半焦距为  $\sqrt{3}$ ，则其渐近线方程为 ( )  
A.  $y = \pm\sqrt{2}x$                       B.  $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$                       C.  $y = \pm 2x$                       D.  $y = \pm\frac{1}{2}x$
4. 已知两条直线  $l_1: 3x - 4y + 6 = 0$  与  $l_2: 6x + my + m = 0 (m \in R)$  相互平行，则这两条直线间的距离为 ( )  
A. 2                      B. 4                      C.  $\frac{2}{5}$                       D. 不确定
5. 圆  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$  与直线  $kx + y + 1 = 0$  的位置关系为 ( )  
A. 相离                      B. 相切                      C. 相交                      D. 以上都有可能
6. 已知直线  $l_1: y = kx - 4$  与直线  $l_2: x + 2y + 2 = 0$  的交点在第三象限，则实数  $k$  的取值范围为 ( )  
A.  $(-\infty, -2)$                       B.  $(-2, +\infty)$   
C.  $(-\infty, -\frac{1}{2})$                       D.  $(-2, 0)$

7. 古希腊时期与欧几里得、阿基米德齐名的著名数学家阿波罗尼斯发现：平面内到两个定点的距离之比为定值  $\lambda (\lambda \neq 1)$  的点所形成的图形是圆。后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆。已知在平面直角坐标系  $xOy$  中，

$A(-2, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ，点  $P$  满足  $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$ 。当  $P$ 、 $A$ 、 $B$  三点不共线时， $\triangle PAB$  面积的最大值为 ( )

- A. 24                      B. 12                      C. 6                      D.  $4\sqrt{3}$

8. 椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  左右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，上顶点为  $A$ ，射线  $AF_1$  交椭圆  $E$  于  $B$ ，以  $AB$  为直径的圆过  $F_2$ ，则椭圆  $E$  的离心率是 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的多个选项中，选出是符合题目要求的所有选项。

9. 已知椭圆  $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4} = 1$  的焦距为 2，则  $m$  的可能值为 ( )

- A. 2                      B. 3                      C. 5                      D. 8

10. 已知直线  $l$  过  $P(1, 2)$ ，且  $A(2, 3)$ ， $B(4, -5)$  到直线  $l$  的距离相等，则  $l$  的方程可能是 ( )

- A.  $4x + y - 6 = 0$       B.  $x + 4y - 6 = 0$       C.  $3x + 2y - 7 = 0$       D.  $2x + 3y - 7 = 0$

11. 若  $P$  是双曲线  $C: x^2 - y^2 = 4$  上一点， $C$  的一个焦点为  $F$ ，点  $A(5, 0)$ ，则下列结论中正确的是 ( )

- A. 离心率为  $\sqrt{2}$                       B.  $|PA|$  的最小值是 3  
C.  $|PF|$  的最小值是  $2\sqrt{2} - 2$                       D. 焦点到渐近线的距离是 2

12. 已知圆  $M: (x-2)^2 + y^2 = 1$ ，点  $P$  是直线  $l: x + y = 0$  上一动点，过点  $P$  作圆  $M$  的切线  $PA, PB$ ，切点分别是  $A, B$ ，下列说法正确的有 ( )

- A. 圆  $M$  上恰有一个点到直线  $l$  的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B. 切线长  $PA$  的最小值为 1  
C. 四边形  $AMBP$  面积的最小值为 1                      D. 直线  $AB$  恒过定点  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

## 第II卷（非选择题）

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 双曲线  $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$  的实轴长为\_\_\_\_\_。

14. 已知圆  $C$  的方程为  $x^2 + y^2 = 5$ ，过点  $(1, 2)$  作圆  $C$  的切线，则切线方程为\_\_\_\_\_。

15. 已知点  $A(1, 1)$  和点  $B(4, 3)$ ， $P$  是直线  $x - y + 1 = 0$  上的一点，则  $|PA| + |PB|$  的最小值是\_\_\_\_\_。

16. 已知椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  的焦点为  $F_1, F_2$ , 第一象限的点  $P$  为椭圆上的动点, 当  $\triangle F_1PF_2$  为直角三角形时,

点  $P$  的横坐标是\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题 10 分, 第 (1) 题 5 分, 第 (2) 题 5 分)

已知  $\triangle ABC$  的顶点  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $C$  在  $y$  轴上.

(1) 已知直线  $l$  过点  $A$  且在两条坐标轴上的截距之和为 6, 求  $l$  的方程;

(2) 若  $C$  到直线  $AB$  的距离为  $5\sqrt{2}$ , 求点  $C$  的坐标.

18. (本小题 12 分, 第 (1) 题 6 分, 第 (2) 题 6 分)

已知定点  $A(-2, 0)$ ,  $B(2, 0)$ , 动点  $M(x, y)$ . 直线  $MA$ ,  $MB$  的斜率之积为  $\frac{3}{4}$ .

(1) 求点  $M(x, y)$  的轨迹方程;

(2) 直线  $l: y = x - 2$  与点  $M(x, y)$  的轨迹的交点为  $C$ , 求  $\triangle OBC$  的面积 ( $O$  为坐标原点).

19. (本小题 12 分, 第 (1) 题 6 分, 第 (2) 题 6 分)

已知直线  $l: (2m+1)x + (m+1)y - 7m - 4 = 0$ , 圆  $C$  的圆心为  $C(1, 2)$ .

(1) 若  $m = -1$ , 则直线  $l$  被圆  $C$  截得的弦长为  $2\sqrt{21}$ , 求圆  $C$  的半径长;

(2) 当直线  $l$  被圆  $C$  截得的弦长最长、最短时, 分别求出  $m$  的值.

20. (本小题 12 分, 第 (1) 题 6 分, 第 (2) 题 6 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 其右焦点为  $F_2(\sqrt{3}, 0)$ , 左焦点为  $F_1$ ,  $A$  在椭圆上且满足  $|AF_1| \cdot |AF_2| = 2$ .

(1) 求  $\angle F_1AF_2$  的大小;

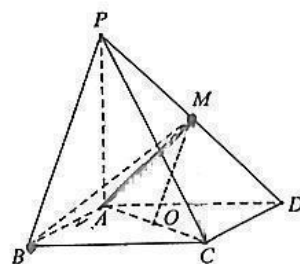
(2) 若  $P$  是该椭圆上的一个动点, 求  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$  的取值范围.

21. (本小题 12 分, 第 (1) 题 5 分, 第 (2) 题 7 分)

在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA = AD = 4$ ,  $AB = 2$ , 线段  $AC$  的中点为  $O$ , 点  $M$  为  $PD$  上的点, 且  $MO = \frac{1}{2}AC$ .

(1) 求证: 平面  $ABM \perp$  平面  $PCD$ ;

(2) 求二面角  $B-AM-C$  的正弦值.



22. (本小题 12 分, 第 (1) 题 5 分, 第 (2) 题 7 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率  $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , 过左焦点  $F$  的直线  $l$  与椭圆交于点  $M$ 、 $N$ . 当直线  $l$  与  $x$  轴垂直时,  $\triangle MON$  的面积为  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$  ( $O$  为坐标原点).

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 设直线  $l$  的倾斜角为锐角且满足  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{4\sqrt{6}}{3 \tan \angle MON}$ , 求直线  $l$  的方程.

命题人: 张学林 周毅鸿

审题人: 周毅鸿 张学林