

高 2024 届周末定时训练 20221016

数 学

数学试题卷共 4 页, 考试时间 120 分钟, 满分 150 分.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、过点 $P(-2, 3)$, 并且在两坐标轴上的截距互为相反数的直线方程是()

A. $x - y + 1 = 0$

B. $x - y + 1 = 0$ 或 $3x + 2y = 0$

C. $x - y - 5 = 0$

D. $x - y + 5 = 0$ 或 $3x + 2y = 0$

2、已知圆心为 $(-2, 1)$ 的圆与 y 轴相切, 则该圆的标准方程是()

A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

B. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$

C. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$

3、已知直线 l 过点 $P(3, 2)$, 且与 x 轴、 y 轴的正半轴分别交于 A, B 两点, 则 $\triangle ABO$ 的面积取得最小值时

直线 l 的方程为()

A. $2x + 3y - 6 = 0$

B. $2x + 3y - 12 = 0$

C. $x + 2y - 6 = 0$

D. $x + 2y - 12 = 0$

4、直线 $l_1: 2x + 3my - m + 2 = 0$ 和 $l_2: mx + 6y - 4 = 0$, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 l_1 与 l_2 之间的距离()

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

5、已知圆的方程为 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $M(x, y)$ 为圆上任意一点, 则 $\frac{y-2}{x-1}$ 的取值范围是()

A. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

B. $[-1, 1]$

C. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

D. $[1, +\infty) \cup (-\infty, -1]$

6、我们把离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆称为“最美椭圆”. 已知椭圆 C 为“最美椭圆”, 且以椭圆 C 上一点 P 和椭圆两焦点为顶点的三角形的面积最大值为 4, 则椭圆 C 的方程为().

A. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

C. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

7、已知 P 为椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 上的一个点, M 、 N 分别为圆 $(x+4)^2 + y^2 = 1$ 和圆 $(x-4)^2 + y^2 = 1$ 上的点, 则 $|PM| + |PN|$ 的最小值为 ()

A. 12

B. 11

C. 10

D. 4

8、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点为 F_1, F_2 , P 是椭圆上一点, 且 $2\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = |\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}|$, 若

$\triangle F_1PF_2$ 的内切圆的半径 r 满足 $|\overrightarrow{PF_1}| = 3r \sin \angle F_1F_2P$, 则椭圆的离心率为 ()

A. $\frac{4}{7}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{7}$

D. $\frac{1}{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9、已知椭圆 $C: \frac{x^2}{12-m} + \frac{y^2}{m-4} = 1 (8 < m < 12)$ 的焦距为 4, 则 ()

A. 椭圆 C 的焦点在 x 轴上

B. 椭圆 C 的长轴长是短轴长的 $\sqrt{3}$ 倍

C. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. 椭圆 C 上的点到其一个焦点的最大距离为 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

10、圆 $O_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 和圆 $O_2: x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 相交于 A, B 两点, 则有

A. 公共弦 AB 所在直线方程为 $x - y = 0$

B. 圆 O_2 上到直线 AB 距离等于 1 的点有 2 个

C. 公共弦 AB 的长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. P 为圆 O_1 上的一个动点, 则 P 到直线 AB 距离的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

11、设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, 斜率为 k 的直线不经过原点 O , 而且与椭圆相交于 A, B 两点, M 为线

段 AB 的中点. 下列结论正确的是 ()

A. 直线 AB 与 OM 垂直

B. 若点 M 坐标为 $(1, 1)$, 则直线方程为 $2x + y - 3 = 0$

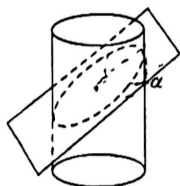
C. 若直线方程为 $y = x + 1$, 则点 M 坐标为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$

D. 若直线方程为 $y = x + 2$, 则 $|AB| = \frac{4}{3}\sqrt{2}$

12. 如图, 与圆柱底面成 60° 的平面 α 截此圆柱, 其截面图形为椭圆. 已知该圆柱底面半径为 2, 则()

A. 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 椭圆的长轴长为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

C. 椭圆的面积为 32π D. 椭圆内接三角形的面积最大值为 $6\sqrt{3}$



三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若方程 $x^2 + y^2 - 2y + 1 - m = 0$ 表示圆, 则实数 m 的取值范围为_____.

14. 已知直线 $y = k(x+1)$ 与曲线 $y = \sqrt{4 - (x-2)^2}$ 有两个交点, 则 k 的取值范围为_____.

15. 若圆 $(x-2)^2 + y^2 = 9$ 上至少有三个不同的点到直线 $l: ax + by = 0$ 的距离为 2, 则直线 l 的斜率的取值范围是_____.

16. 已知 F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点, 若直线 $y = kx$ 与椭圆相交于 A, B 两点, 且 $\angle AFB = 60^\circ$, 则椭圆离心率的取值范围是_____.

四、解答题: 本题共 6 个小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 已知椭圆的中心在原点, 焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$, 且长轴长为 4.

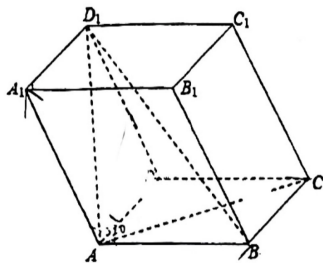
(1) 求椭圆的方程;

(2) 直线 $y = x + 1$ 与椭圆相交于 A, B 两点, 求弦长 $|AB|$.

18. 如图, 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $AA_1 = \sqrt{2}$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

(1) 试用 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 表示向量 \overrightarrow{AC} , $\overrightarrow{BD_1}$;

(2) 若 $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 120^\circ$, 求直线 AC 与 BD_1 所成的角.



19. 已知圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$, 动直线 l 过点 $P(1, 2)$.

(1) 当直线 l 与圆 C 相切时, 求直线 l 的方程

(2) 若直线 l 与圆 C 相交于 A, B 两点, 求 AB 中点 M 的轨迹方程.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点, 点 $A(0, 3)$, 设圆 C 的半径为 1, 圆心 $C(a, b)$ 在直线 $l: y = 2x - 4$ 上.

(1) 若圆心 C 也在直线 $y = -x + 5$ 上, 求圆 C 的方程;

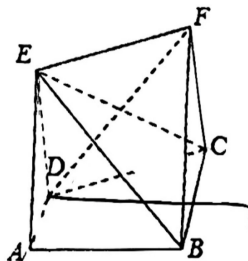
(2) 若圆 C 上存在点 M , 使 $|MA| = |MO|$, 求圆心 C 的横坐标 a 的取值范围.

21. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = BC = 2AD = 2$, 四边形 $EDCF$ 为矩形, $DE = 2$, 平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 求证: $DF \parallel$ 平面 ABE ;

(2) 若点 P 在线段 EF 上, 且直线 AP 与平面 BEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{14}}{14}$,

求线段 AP 的长.



22. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过三个点 $(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-1, -\frac{5}{2})$, $(1, \frac{3}{2})$ 中的两个.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 M 为椭圆的上顶点, 直线 l 不经过点 M 且与椭圆交于 A, B 两点, 当直线 AM, BM 的斜率之和为 $2\sqrt{3}$ 时, 求证: 直线 l 过定点.