

重庆育才中学高 2024 届高三（上）期中模拟题（一）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案的代号填涂在答题卡上。

1. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda (\lambda > 0)$ 具有 ()

- A. 相同的离心率 B. 相同的焦点 C. 相同的顶点 D. 相同的长、短轴

2. 已知直线过点 $P(1, 2)$ ，且在两坐标轴上截距相等，则直线方程为 ()

- A. $2x - y = 0$ 或 $x + y - 3 = 0$ B. $2x - y = 0$
C. $x - 2y = 0$ 或 $x + y - 3 = 0$ D. $x + y - 3 = 0$

3. 已知直线 $y = x + b$ 与曲线 $x - \sqrt{1 - y^2} = 0$ 有且仅有一个公共点，则 b 的取值范围是 ()

- A. $|b| = \sqrt{2}$ B. $-1 < b < 1$ 或 $b = -\sqrt{2}$ C. $-1 < b \leq 1$ D. $-1 < b \leq 1$ 或 $b = -\sqrt{2}$

4. 已知一条光线从点 $P(-1, 5)$ 射出，经直线 $x - y = 0$ 反射后经过点 $(2, 3)$ ，则反射光线所在直线的方程为 ()

- A. $2x + 3y - 13 = 0$ B. $3x + 4y - 17 = 0$ C. $4x + 3y - 17 = 0$ D. $3x + 2y - 12 = 0$

5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A ，上顶点为 B ，右焦点为 F ，若 $\angle ABF = 90^\circ$ ，则椭圆 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

6. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点，点 M 在 C 上，则 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为 ()

- A. 13 B. 12 C. 9 D. 6

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线与圆 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 相切，则该双曲线的离心率为 ()

- A. 2 B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{3}{2}$

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与双曲线的左右两支分别交于点 P, Q ，若 $QP = QF_2$ ，则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{7}$ B. $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ D. $\sqrt{6}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分，请将正确答案的代号填涂在答题卡上。

9. 若“ $m = t$ ”是“方程 $\frac{x^2}{m-3} + \frac{y^2}{7-m} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的充分不必要条件，则 t 的取值可以为

()

- A. 3 B. 4 C. $\frac{7}{2}$ D. 5

10. 已知直线 $l: (k-2)x + (1-k)y + 2k-3 = 0$ 和圆 $O: x^2 + y^2 = 9$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 直线 l 恒过定点 $(1,1)$ B. 存在 k 使得直线 l 与直线 $l_0: x-2y+2=0$ 垂直
C. 对于任意的 k , 直线 l 与圆 O 都相交 D. 直线 l 被圆 O 截得弦长的最小值为 $2\sqrt{7}$

11. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 1$, 则下列四个命题表述正确的是 ()

- A. 圆 C 上有且仅有 2 个点到直线 $l: x+y-1=0$ 的距离都等于 $\frac{1}{2}$
B. 点 $P(x,y)$ 在圆 C 上, 则 $\frac{y-2}{x}$ 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$
C. 若直线 $ax+by+1=0$ 与圆 C 相交, 则点 $P(a,b)$ 在圆 C 内
D. 过点 $A(3,1)$ 作圆 C 的两条切线, 切点分别为 M, N , 则直线 MN 的方程为 $3x+y-1=0$

12. 动点 $M(x,y)$ 分别到两定点 $(-5,0), (5,0)$ 连线的斜率的乘积为 $-\frac{16}{25}$, 设 $M(x,y)$ 的轨迹为曲线 C , F_1, F_2 分别为曲线 C 的左、右焦点, 则下列命题中正确的有 ()

- A. 曲线 C 的焦点坐标为 $F_1(-3,0), F_2(3,0)$ B. 若 $\angle F_1 M F_2 = 30^\circ$, 则 $S_{\triangle F_1 M F_2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$
C. $\triangle F_1 M F_2$ 的内切圆的面积的最大值为 $\frac{9\pi}{4}$
D. 点 P 在圆 $E: (x-7)^2 + (y-5)^2 = 1$ 上, 则 $|MP| - |MF_2|$ 的最小值为 $5\sqrt{5} - 11$

第II卷 非选择题

三、填空题: 本大题 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 请将答案填写在答题卡相应的位置上.

13. 圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $E: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 的公切线条数为_____.

14. 已知圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 关于直线 $2ax - by + 2 = 0 (a, b \in R)$ 对称, 则 $a + b =$ _____.

15. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点是 F , 左、右顶点分别是 A_1, A_2 , 过 F 作 $A_1 A_2$ 的垂线与双曲线交于 B, C 两点, 若 $A_1 B \perp A_2 C$, 则该双曲线的渐近线的斜率为_____.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 焦距为 $2c$, P 是椭圆 C 上一点 (不在坐标轴上), Q 是 $\angle F_1 P F_2$ 的平分线与 x 轴的交点, 若 $|Q F_2| = 2|O Q|$, 则椭圆离心率的范围是_____.

四、解答题: 本大题 6 个小题, 共 70 分, 解答时应写出必要的文字说明、演算步骤或推理过程, 请将答案填写在答题卡相应的位置上.

17. (本小题满分 10 分) 已知直线 $l_1: 2x - y + 6 = 0$ 和 $l_2: x - y + 1 = 0$ 的交点为 P .

(1) 若直线 l 经过点 P 且与直线 $l_3: 4x - 3y - 5 = 0$ 平行, 求直线 l 的方程;

(2) 若直线 m 经过点 P 且与两坐标轴围成的三角形的面积为 5, 求直线 m 的方程.

18. (本小题满分 12 分) 已知圆 C 的圆心 C 在直线 $x - y - 1 = 0$ 上, 且与直线 $2x + 3y - 10 = 0$ 相切于点 $P(2, 2)$.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 若过点 $Q(2, 3)$ 的直线 l 被圆 C 截得的弦 AB 长为 6, 求直线 l 的方程.

19. (本小题满分 12 分) 已知椭圆 C 的方程为: $x^2 + 4y^2 - 4k^2 = 0 (k > 0)$.

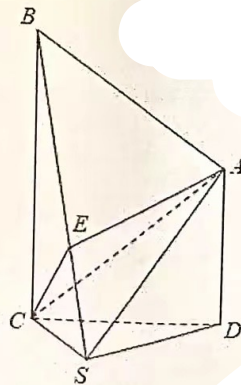
(1) 求椭圆 C 的离心率;

(2) 过椭圆 C 的右焦点 F 作斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A 、 B 两点, O 为坐标原点, 求 $\frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle BOF}}$ 的值.

20. (本小题满分 12 分) 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $BC \perp CD$, 平面 $SCD \perp$ 平面 $ABCD$. $\triangle SCD$ 是以 CD 为斜边的等腰直角三角形, $BC = 2AD = 2CD = 4$, E 为 BS 上一点, 且 $BE = 2ES$.

(1) 证明: 直线 $SD \parallel$ 平面 ACE ;

(2) 求二面角 $S-AC-E$ 的余弦值.



21. (本小题满分 12 分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$, 右焦点 F 与点 $M(0, 2\sqrt{5})$ 的连线与其一条渐近线平行.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 经过点 F 的直线 l 与双曲线 C 的右支交于点 A, B , 试问是否存在一定点 P , 使 $\angle OPA = \angle OPB$ 恒成立, 若存在, 请求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 设 $M(x_0, y_0)$ 是椭圆 C 上的一动点, 以 M 为圆心作一个半径 $r = 2$ 的圆, 过原点作此圆的两条切线分别与椭圆 C 交于点 P, Q , 若存在圆 M 与两坐标轴都相切.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 OP, OQ 的斜率都存在, 且分别记为 k_1, k_2 . 求证: $k_1 k_2$ 为定值;

(3) 探究 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 是否为定值? 若是, 则求出 $|OP| \cdot |OQ|$ 的最大值; 若不是, 请说明理由.

