

重庆市双福育才中学校高2025届2022-2023学年（上）半期考试

数学试卷

本试卷为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试时间120分钟。

注意事项：1. 答卷前，请考生务必把自己的姓名、准考证号填写在答题卡上；

2. 作答时，务必将答案写在答题卡上，写在木试卷及草稿纸上无效；

3. 考试结束后，将答题卡交回。

第I卷

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $A \cup B =$ ()

A. $(1, 2)$

B. $[1, 2)$

C. $[-1, +\infty)$

D. $(-1, +\infty)$

2. 已知命题 $p: \exists n \in \mathbb{N}, 2^n < 10$, 则 $\neg p$ 为 ()

A. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq 10$

B. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > 10$

C. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \leq 10$

D. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n < 10$

3. 下列命题中，是真命题的是 ()

A. 如果 $a > b$, 那么 $a^2 > b^2$

B. 如果 $a > b$, 那么 $ac^2 > bc^2$

C. 如果 $a > b, c > d$, 那么 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

D. 如果 $a > b, c < d$, 那么 $a - c > b - d$

4. 定义在 \mathbb{R} 上的奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = 2^x + 2x - 1$, 则 $f(-1) =$ ()

A. -3

B. -1

C. 1

D. 3

5. 如果奇函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 6]$ 上是增函数且最大值为8，那么 $f(x)$ 在区间 $[-6, -2]$ 上是 ()

A. 增函数且最大值是-8

B. 增函数且最小值是-8

C. 减函数且最大值是-8

D. 减函数且最小值是-8

6. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 3]$, 则函数 $f(1-x) + f(x)$ 的定义域为 ()

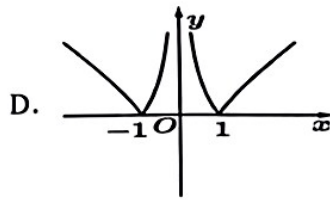
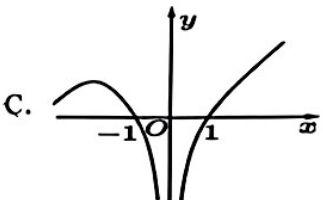
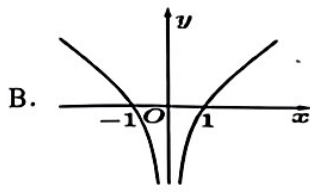
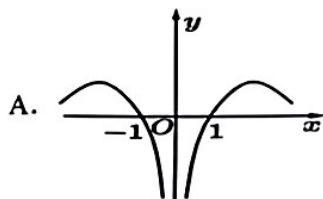
A. $[-2, 2]$

B. $[-2, 3]$

C. $[-1, 2]$

D. $[-1, 3]$

7. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x|}$ 的大致图象是 ()



8. 使得“函数 $f(x) = \sqrt{7 + 2ax - x^2}$ 在区间 $[-2, 2]$ 上单调递减”成立的一个充分不必要条件是 ()

A. $a \leq -2$

B. $a < -2$

C. $-\frac{3}{4} < a < -2$

D. $-\frac{3}{4} \leq a \leq -2$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列函数中在区间 $(0, 1)$ 上单调递减的函数是 ()

- A. $y = x^{\frac{1}{2}}$ B. $y = \frac{1}{x-1}$ C. $y = |x-1|$ D. $y = x + \frac{1}{x}$

10. 下列选项中正确的有 ()

- A. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 与 $g(t) = t^2 - 2t + 1$ 是同一函数
 B. $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 与 $g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$ 表示同一函数
 C. 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $x = 2$ 的交点最多有 1 个
 D. 若 $f(x) = |x| - |x-1|$, 则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0$

11. 已知 x, y 都为正数, 且 $x + y = 1$, 则 ()

- A. $xy \leq \frac{1}{4}$ ✓ B. $x^2 + y^2 \geq 1$
 C. $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 3 + 2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2}$ ✓

12. 若函数 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 都满足 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) < x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$, 下列结论正确的是 ()

- A. $f(0) = 0$ B. 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是单调递增函数
 C. $f(-2) > f(1) > f(2)$ D. $f(x+1) < f(-x+2)$ 的解为 $x > \frac{1}{2}$

第 II 卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(9, 3)$, 则 $f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知函数 $f\left(\frac{1}{x}-1\right) = 2-4x$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知 $f(x) = \begin{cases} (1-a)x+2a, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$ 的值域为 \mathbf{R} , 那么 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 函数 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 则不等式 $f(x-2) > f(1)$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (结果用区间形式表示)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

化简：(1) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{0.5} - 0.1^{-2} + \frac{1}{3} \times \pi^0$;

(2) $\sqrt[3]{0.125} - \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}$.

18. (12 分)

已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | a \leq x \leq a+4\}$.

(1) 若 $a=1$, 求 $A \cap B$;

(2) 在 ① $C_R A \supseteq C_R B$, ② $A \cap B = A$, ③ $A \cup B = B$ 中任选一个作为已知条件, 求实数 a 的取值范围.

19. (12 分)

已知 $f(x)$ 是二次函数且 $f(0)=1, f(x+2)-f(x)=4x+2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $g(x)=f(x+a)$ (a 为常数), 求 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的最小值.

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+t}$ ($t > 0$).

(1) 若 $t=4$, 求 $f(1)$ 、 $f(4)$ 与 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 、 $f(8)$ 值;

(2) 由 (1) 的计算结果猜想函数 $f(x)$ 在 $t=4$ 时满足什么性质, 并证明你的猜想;

(3) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{t})$ 上单调递增, 在区间 $(\sqrt{t}, +\infty)$ 上单调递减.

21. (12 分)

某乡镇响应“绿水青山就是金山银山”的号召，因地制宜的将该镇打造成“生态水果特色小镇”. 经调研发现：某水果树的单株产量 W (单位：千克) 与施用肥料 x (单位：千克) 满足如下关系：

$$W(x) = \begin{cases} 2x^2 + 34, & 0 \leq x \leq 2 \\ 50 - \frac{8}{x-1}, & 2 < x \leq 5 \end{cases}, \text{ 且单株施用肥料及其它成本总投入为 } 20x \text{ 元. 已知这种水果的市场售价大}$$

约为 10 元/千克，且销路畅通供不应求. 记该水果树的单株利润为 $f(x)$ (单位：元).

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 当施用肥料为多少千克时，该水果树的单株利润最大？最大利润是多少？

22. (12 分)

若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足： $\forall x_1, x_2 \in R$ ，都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 1$ 成立， $f(1) = 1$ 且 $f(x)$ 为 R 上的增函数.

(1) 求 $f(0)$ 的值；

(2) 证明： $f(x) + 1$ 为奇函数；

(3) 若对 $\forall x \in R$ ， $\forall y \in (1, +\infty)$ ，不等式 $f(x^2 + m^2 y^2) - f(2mxy - my) > 4$ 都恒成立，求实数 m 的取值范围.

命题人、审题人：王景、刘婷婷.