

重庆八中高 2025 级高一（上）数学周日检测（三）

命题人：方明 罗金贤 税长江

一、单选题

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$ ，集合 $A=\{x|2 < x < 5\}$ ， $B=\{x|1 < x < 3\}$ ，则集合 $A \cap (\complement_U B) = (\quad)$

- A. $(2,3)$ B. $(2,3]$ C. $[3,5)$ D. $(3,5)$

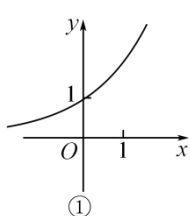
2. 已知函数 $f\left(\frac{1}{x}+1\right)=2x+3$ ，则 $f(2)$ 的值为 (\quad)

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

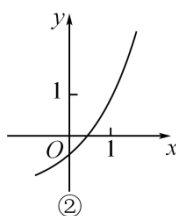
3. “ $n=1$ ”是“幂函数 $f(x)=(n^2-3n+3) \cdot x^{n^2-3n}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数”的一个 (\quad) 条件

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

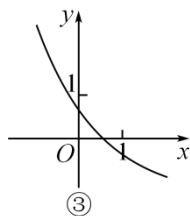
4. 函数 $y=a^x - \frac{1}{a}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象可能是 (\quad)



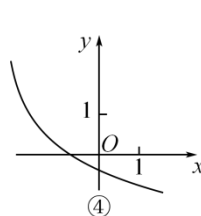
①



②



③



④

- A. ①③ B. ②④ C. ④ D. ①

5. 已知 $x > 0$ ， $y > 0$ ，且 $2x + y = xy$ ，则 $x + 2y$ 的最小值为 (\quad)

- A. 8 B. $8\sqrt{2}$ C. 9 D. $9\sqrt{2}$

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x < 0 \\ (a-2)x + 3a, & x \geq 0 \end{cases}$ ，满足对任意 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立，则 a 的取值范围是 (\quad)

- A. $(0,1)$ B. $[\frac{3}{4}, 1)$ C. $(0, \frac{1}{3}]$ D. $[\frac{3}{4}, 2)$

7. 设 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数，且 $f(1+x) = f(-x)$ ，若 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ ，则 $f\left(\frac{5}{3}\right) = (\quad)$

- A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

8. 我国某科研机构新研制了一种治疗新冠肺炎的注射性新药，并已进入二期临床试验阶段。已知这种新药在注射停止后的血药含量 $c(t)$ (单位: mg/L) 随着时间 t (单位: h) 的变化用指数模型 $c(t) = c_0 e^{-kt}$ 描述，

假定某药物的消除速率常数 $k = 0.1$ (单位: h^{-1})，刚注射这种新药后的初始血药含量 $c_0 = 2000 \text{mg/L}$ ，且这种

种新药在病人体内的血药含量不低于 1000mg/L 时才会对新冠肺炎起疗效，现给某新冠病人注射了这种新药，则该新药对病人有疗效的时长大约为 (\quad) (参考数据: $\ln 2 \approx 0.693, \ln 3 \approx 1.099$)

- A. 5.32h B. 6.23h C. 6.93h D. 7.52h

二、多选题

9. 下列说法正确的是 ()

A. 若 $a > b$, $c < 0$, 则 $a^2c < b^2c$

B. 若 $a > b$, $c < 0$, 则 $a^3c < b^3c$

C. 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$

D. 函数 $y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值是 2

10. 下列说法正确的是 ()

A. 命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > -1$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < -1$ ”

B. 函数 $f(x) = a^{x-2} + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 $(2, 2)$

C. $f(x) = \frac{4^x+1}{4^x-1}$ 为奇函数

D. 函数 $f(x) = x^2 - 2|x| + 5$ 的单调递增区间为 $[-1, 0]$, $[1, +\infty)$

11. 若 $4^x - 4^y < 5^{-x} - 5^{-y}$, 则下列关系正确的是 ()

A. $x < y$

B. $y^{-3} > x^{-3}$

C. $\sqrt{x} > \sqrt{y}$

D. $\left(\frac{1}{3}\right)^y < 3^{-x}$

12. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - a + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 若非空集合 $A = \{x | f(x) \leq 0\}$, $B = \{x | f(f(x)+1) \leq 1\}$, $A = B$,

则下列说法中正确的是 ()

A. b 为常数

B. b 的取值与 a 有关

C. $0 \leq a \leq 2\sqrt{2}$

D. $-4\sqrt{2} \leq a \leq -4$

三、填空题

13. 已知函数 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x - 3$, 则 $x < 0$ 时, $f(x) =$ _____.

14. 若 $2^m = 3^n = k$, 且 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1$, 则实数 k 的值为_____.

15. 函数 $f(x) = a^{2x} + a^x + 1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在 $[-1, 1]$ 上的最大值为 13, 则实数 a 的值为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1, & x \geq 0, \\ 2^x - 2, & x < 0, \end{cases}$ 若方程 $[f(x)]^2 - 2af(x) + 4 = 0$ 有 5 个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题

17. (1) 求值: $(\lg 2)^2 + \lg 2 \lg 50 + 2 \lg 5$;

(2) 求值: $27^{\frac{2}{3}} \times \left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} - 0.25^{-2} + \sqrt{(-2)^6} + \sqrt{(3-\pi)^2}$;

18. 某种放射性元素每年都会衰减为前一年的 p 倍 ($0 < p < 1$)，科学家可以通过生物的遗体中该放射性元素的存量来估算古生物生活的年代. 已知该放射性元素的半衰期约为 4200 年 (即每经过 4200 年，该元素的存量变为原来的一半)，已知某古生物遗体中该元素的初始存量为 a .

(1) 求出 p 并写出该元素的存量 y 与时间 x (年) 的关系式;

(2) 经检测，古生物遗体中该元素现在的存量为 $\frac{2a}{5}$ ，请推算该古生物生活在距今大约多少年前. (参考数据: $\lg 2 \approx 0.3$)

19. 已知函数 $f(x) = 2x^2 - 2ax + 1$.

(1) 解关于 x 的不等式 $f(x) > a + 1 - x$;

(2) 若不等式 $f(x) < 0$ 在 $x \in [-2, 0]$ 上有解，求实数 a 的取值范围.

20. 已知 $f(x) = \frac{2^x + n}{2^{x+1} + m}$ 为 \mathbb{R} 上的奇函数.

(1) 求实数 m , n 的值;

(2) 当 $x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 时, $f(kx^2) + f(2x - 1) > 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = x|x-a|$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) $a > 0$ 时, 写出函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$, 求 a 的值.

22. 已知函数 $f(x)$ 满足如下条件: ①对任意 $x > 0$, $f(x) > 0$; ② $f(1) = 1$; ③对任意 $x > 0$, $y > 0$, 总有 $f(x) + f(y) \leq f(x+y)$.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(2) ①证明: 对任意的 $s > 0$, $\frac{f(2^k s)}{f(s)} \geq 2^k$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$;

②证明: 对任意的 $x \in (2^{k-1}, 2^k)$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 都有 $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$.