重庆八中高2025级高一（上）数学周日检测（三）

参考答案

1．C【详解】因为$B=\{x|1<x<3\}$，所以$\complement_U B=\{x|x\le 1$或$x\ge 3\}$，所以$A\cap(\complement_U B)=[3,5)$.故选：C.

2．B【详解】解：根据题意，函数$f(\frac{1}{x}+1)=2x+3$，若$\frac{1}{x}+1=2$，解可得$x=1$，将$x=1$代入$f\left(\frac{1}{x}+1\right)=2x+3$，可得$f(2)=5$，故选：$B$.

3．A【详解】由题意，当$n=1$时，$f(x)=x^{-2}$在$(0,+\infty)$上是减函数，故充分性成立；

若幂函数$f(x)=(n^2-3n+3)\cdot x^{n^2-3n}$在$(0,+\infty)$上是减函数，

则$\begin{cases}n^2-3n+3=1\\n^2-3n<0\end{cases}$，解得$n=1$或$n=2$，故必要性不成立因此“$n=1$”是“幂函数$f(x)=(n^2-3n+3)\cdot x^{n^2-3n}$在$(0,+\infty)$上是减函数”的一个充分不必要条件，故选：A

4．C【详解】当$a>1$时，$0<\frac{1}{a}<1$，函数$y=a^x$的图象为过点$(0,1)$的上升的曲线，函数$y=a^x-\frac{1}{a}$图象由函数$y=a^x$向下平移$\frac{1}{a}$个单位可得，故①②错误；

当$0<a<1$时，$\frac{1}{a}>1$，函数$y=a^x$的图象为过点$(0,1)$的下降的曲线，函数$y=a^x-\frac{1}{a}$图象由函数$y=a^x$向下平移$\frac{1}{a}$个单位可得，故④ 正确③错误；故选：C

5．C【详解】因为$2x+y=xy$，$x>0$，$y>0$，所以$\frac{2}{y}+\frac{1}{x}=1$，

$\therefore x+2y=(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=1+4+\frac{2y}{x}+\frac{2x}{y}\ge 5+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}=9$，当且仅当$x=y=3$取得等号，则$x+2y$的最小值为9，故选：C

6．C【详解】$\because f(x)$满足对任意$x_1\ne x_2$，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$成立，$\therefore f(x)$在$R$上是减函数，$\therefore\begin{cases}0<a<1\\a-2<0\\(a-2)\times 0+3a\le a^0\end{cases}$，解得$0<a\le\frac{1}{3}$，$\therefore a$的取值范围是$\left(0,\frac{1}{3}\right]$．故选：C.

7．C【详解】由题意可得：$f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(1+\frac{2}{3}\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=-f\left(\frac{2}{3}\right)$，而

$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(1-\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=-f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$，故$f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{3}$.故选：C.

8．C【详解】解：由题意得：$c(t)=c_0\mathrm{e}^{-kt}=2000\mathrm{e}^{-0.1t}$设该要在机体内的血药浓度变为1000mg/L需要的时间为t_1，$c(t_1)=2000\mathrm{e}^{-0.1t_1}\ge 1000$，$\mathrm{e}^{-0.1t_1}\ge\frac{1}{2}$，故$-0.1t\ge-\ln 2$，$t\le\frac{\ln 2}{0.1}\approx 6.93$

故该新药对病人有疗效的时长大约为$6.93h$，故选：C

9．BC【详解】解：由$a=2>b=-3$，$c=-1$时，得$a^2c=-4>b^2c=-9$，选项A错误；

由$a>b$，得$a^3>b^3$，又$c<0$，所以$a^3c<b^3c$，选项B正确；

若$a<b<0$，则$a^2>ab$，$ab>b^2$，$a^2>ab>b^2$，选项C正确；

$y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$，令$t=\sqrt{x^2+4}$，则$t\in[2,+\infty)$，因为$y=t+\frac{1}{t}$在

$\left[2,+\infty\right)$上单调递增，则$t+\frac{1}{t}\geq 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，即$\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}\geq\frac{5}{2}$，选项$D$错误.故选：BC.

10．BCD【详解】因为命题"$\forall x\in R$，$x^2>-1$"的否定是"$\exists x\in R$，$x^2\leq -1$"，故A错误；

因为$f\left(x\right)=a^{x-2}+1$，令$x-2=0$，可得$x=2,y=2$，即函数图象恒过定点$\left(2,2\right)$，故B正确；

因为$f\left(x\right)=\frac{4^x+1}{4^x-1}$，可知定义域为$\left\{x\mid x\in R且x\neq 0\right\}$关于原点对称，又

$f\left(-x\right)=\frac{4^{-x}+1}{4^{-x}-1}=\frac{1+4^x}{1-4^x}=-f\left(x\right)$，故函数为奇函数，故C正确；

因为$f\left(x\right)=x^2-2\left|x\right|+5=\begin{cases}x^2-2x+5,x\geq 0\\x^2+2x+5,x<0\end{cases}$，所以函数的单调递增区间为$\left[-1,0\right]$，$\left[1,+\infty\right)$，故D正确.故选：BCD.

11.【答案】AD【详解】由$4^x-4^y<5^{-x}-5^{-y}$，得$4^x-5^{-x}<4^y-5^{-y}$，令$f\left(x\right)=4^x-5^{-x}$，则$f\left(x\right)<f\left(y\right)$．因为$g\left(x\right)=4^x$，$h\left(x\right)=-5^{-x}$在$\mathbf{R}$上都是增函数，所以$f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上是增函数，所以$x<y$，故A正确；

因为$G\left(x\right)=x^{-3}$在$\left(0,+\infty\right)$和$\left(-\infty,0\right)$上都单调递减，所以当$x<y<0$时，$x^{-3}>y^{-3}$，故B错误；

当$x<0$，$y<0$时，$\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$无意义，故C错误；

因为$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$在$\mathbf{R}$上是减函数，且$x<y$，所以$\left(\frac{1}{3}\right)^y<\left(\frac{1}{3}\right)^x$，即$\left(\frac{1}{3}\right)^y<3^{-x}$，故D正确．故选：AD．

12．AC【详解】不妨设$f(x)\leq 1$的解集为$[m,n]$，则有$m\leq f(x)+1\leq n$，

∴$B=\{x\mid f[f(x)+1]\leq 1\}=\{x\mid m\leq f(x)+1\leq n\}=\{x\mid m-1\leq f(x)\leq n-1\}$，

由$A=B\neq\varnothing$，得$n-1=0$且$f(x)_{\min}\geq m-1$，由$f(n)=f(1)=1$得$b=0$，故A正确，B错误；

∴$f(x)=x^2+ax-a$，∵$A=\left\{x\middle|f(x)\leq 0\right\}\neq\varnothing$，∴$\Delta=a^2+4a\geq 0$，解得$a\geq 0$或$a\leq -4$，

又m，$n(m\leq n)$为方程$f(x)=1$的两个根，∴$m=-1-a$，∴$f(x)_{\min}=\frac{-4a-a^2}{4}\geq -a-2$，解得$-2\sqrt{2}\leq a\leq 2\sqrt{2}$，∴$a\in[0,2\sqrt{2}]$，故C正确，D错误.故选：AC.

13．$-x^2+2x+3$【详解】当$x<0$时，$-x>0$，则$f(-x)=x^2-2x-3$，

因为函数为奇函数，所以$f(-x)=-f\left(x\right)=x^2-2x-3$，即$f\left(x\right)=-x^2+2x+3$.

所以当$x<0$时，$f\left(x\right)=-x^2+2x+3$.故答案为：$-x^2+2x+3$.

14．18【详解】由题设，$m=\log_2 k$，$n=\log_3 k$，所以

$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\frac{1}{\log_2 k}+\frac{2}{\log_3 k}=\log_k 2+\log_k 9=\log_k 18=1$，则$k=18$.故答案为：18.

15【详解】∵$f\left(x\right)=a^{2x}+a^x+1$，令$a^x=t$，则$t>0$，则$y=t^2+t+1=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$，其对称轴为$t=-\frac{1}{2}$.该二次函数在$[-\frac{1}{2},+\infty)$上是增函数.

①若$a>1$，由$x\in[-1,1]$，得$t=a^x\in\left[\frac{1}{a},a\right]$，故当$t=a$，即$x=1$时，$y_{\max}=a^2+a+1=13$，解得$a=3$($a=-4$舍去).

②若$0<a<1$，由$x\in[-1,1]$，可得$t=a^x\in\left[a,\frac{1}{a}\right]$，故当$t=\frac{1}{a}$，即$x=-1$时，

$y_{\max}=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}+1=13$.

$\therefore a=\dfrac{1}{3}$或$-\dfrac{1}{4}$(舍去).综上可得$a=3$或$\dfrac{1}{3}$.

16.【答案】$-\dfrac{5}{2}<a<-2$

【分析】令$t=f(x)$，则$t^2-2at+4=0$在$(-5,-2)$，$(-2,-1)$上各有一个实数解或$t^2-2at+4=0$的一个解为-1，另一个解在$(-2,-1)$内，或$t^2-2at+4=0$的一个解为-2，另一个解在$(-2,-1)$内.

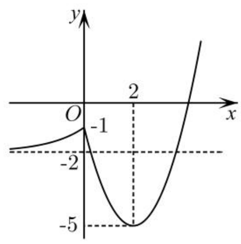
【详解】函数$f(x)$的大致图象如图所示，

对于方程$[f(x)]^2-2af(x)+4=0$有5个不同的实数解，令$t=f(x)$，

则$t^2-2at+4=0$在$(-5,-2)$，$(-2,-1)$上各有一个实数解或$t^2-2at+4=0$的一个解为-1，另一个解在$(-2,-1)$内，或$t^2-2at+4=0$的一个解为-2，另一个解在$(-2,-1)$内，

当$t^2-2at+4=0$在$(-5,-2)$，$(-2,-1)$上各有一个实数解时，

设$g(t)=t^2-2at+4$，则$\begin{cases}\Delta=4a^2-16>0,\\ g(-2)=8+4a<0,\\ g(-1)=5+2a>0,\\ g(-5)=29+10a>0,\end{cases}$ 解得$-\dfrac{5}{2}<a<-2$，



当$t^2-2at+4=0$的一个解为-1时，$a=-\dfrac{5}{2}$，

此时方程的另一个解为-4，不在$(-2,-1)$内，不满足题意，

当$t^2-2at+4=0$的一个解为-2时，$a=-2$，

此时方程的另一个解为-2，不在$(-2,-1)$内，不满足题意，

综上可知，实数a的取值范围为$-\dfrac{5}{2}<a<-2$，故答案为：$-\dfrac{5}{2}<a<-2$.

17.【详解】(1)

$(\lg 2)^2+\lg 2\lg 50+2\lg 5=(\lg 2)(\lg 2+\lg 50)+2\lg 5=2\lg 2+2\lg 5=2\times(\lg 2+\lg 5)=2$；

(2)原式$=\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(\dfrac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(4^{-1}\right)^{-2}+8+\ \pi-\ 3=9\times\dfrac{2}{3}-16+5+\pi=\pi-5$；

18.(1)由半衰期的定义可知，$p^{4200}=\dfrac{1}{2}$，所以$p=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4200}}$，

所以该元素的存量y与时间x(年)的关系式为$y=a\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4200}}$，$x\geq 0$.

(2)由$a\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4200}}=\dfrac{2}{5}a$，得$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4200}}=\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{10}$，所以$\dfrac{x}{4200}=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{4}{10}=\dfrac{\lg\frac{4}{10}}{\lg\frac{1}{2}}=\dfrac{1-2\lg 2}{\lg 2}$，

所以$x=\dfrac{4200(1-2\lg 2)}{\lg 2}\approx 5600$.因此，该古生物生活在距今大约5600年前.

19.(1)$f(x)>a+1-x$，即$2x^2-2ax+1>a+1-x$，所以$2x^2-(2a-1)x-a>0$，所以$(2x+1)(x-a)>0$，①当$a<-\dfrac{1}{2}$时不等式的解为$x<a$或$x>-\dfrac{1}{2}$，

②当$a=-\dfrac{1}{2}$时不等式的解为$x\neq-\dfrac{1}{2},x\in R$，

③当$a>-\dfrac{1}{2}$时不等式的解为$x<-\dfrac{1}{2}$或$x>a$，

综上：原不等式的解集为：当$a<-\dfrac{1}{2}$时$\left\{x\middle|\ x<a\text{或}x>-\dfrac{1}{2}\right\}$，当$a=-\dfrac{1}{2}$时$\left\{x\middle|\ x\neq-\dfrac{1}{2}\right\}$，

当 $a>-\frac{1}{2}$ 时 $\{x|\ x>a$ 或 $x<-\frac{1}{2}\ \}$.

(2)不等式 $f(x)<0$ 在 $x\in[-2,0)$ 上有解，即 $2x^2-2ax+1<0$ 在 $x\in[-2,0)$ 上有解，

所以 $a<x+\frac{1}{2x}$ 在 $x\in[-2,0)$ 上有解，所以 $a<\left(x+\frac{1}{2x}\right)_{\max}$ ，$x\in[-2,0)$,

因为 $(-x)+\left(-\frac{1}{2x}\right)\geq 2\sqrt{(-x)\left(-\frac{1}{2x}\right)}=\sqrt{2}$，所以 $x+\frac{1}{2x}\leq-\sqrt{2}$，

当且仅当 $-x=-\frac{1}{2x}$，即 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，所以 $a<-\sqrt{2}$.

20.【详解】(1)解:因为 $f(x)$ 在定义域R上是奇函数.所以 $f(0)=0$，即 $\frac{1+n}{2+m}=0$，所以 $n=-1$，

又由 $f(-1)=-f(1)$，即 $\frac{2^{-1}-1}{1+m}=-\frac{1}{4+m}$，所以 $m=2$，

检验知，当 $m=2$ ，$n=-1$ 时，$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x+1}+2}=\frac{1-2^x}{2+2^{x+1}}=-f(x)$，$f(x)$ 为奇函数.

（2）由（1）知 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^{x+1}+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，因为 $y=2^x+1$ 在R上单增，所以 $y=\frac{1}{2^x+1}$ 在R上单减，所以 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$ 在R上单调递增.

因为 $f(x)$ 是奇函数，从而不等式 $f(kx^2)+f(2x-1)>0$ 等价于

$f(kx^2)>-f(2x-1)=f(1-2x)$，因为 $f(x)$ 在R上单调递增，故 $kx^2>1-2x$，

即对一切 $x\in\left[\frac{1}{3},3\right]$ 有 $k>\frac{1-2x}{x^2}$ 恒成立，设 $g(x)=\frac{1-2x}{x^2}=\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot\frac{1}{x}$，

令 $t=\frac{1}{x}$，$t\in\left[\frac{1}{3},3\right]$，则有 $h(t)=t^2-2t$，$t\in\left[\frac{1}{3},3\right]$,

所以 $g(x)_{\max}=h(t)_{\max}=h(3)=3$，所以 $k>3$，即 k 的取值范围为 $(3,+\infty)$

21.【详解】(1) $\because f(x)=x|x-a|=\begin{cases}x(x-a),x\geq a\\-x(x-a),x<a\end{cases}$,

因为函数 $y=x(x-a)$ 是开口向上，对称轴为 $x=\frac{a}{2}$ 的二次函数;

函数 $y=-x(x-a)$ 是开口向下，对称轴为 $x=\frac{a}{2}$ 的二次函数;

$\therefore a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left(\frac{a}{2},a\right]$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

（2）$\because f(x)=\begin{cases}x(x-a),x\geq a\\-x(x-a),x<a\end{cases}$,

①$a\leq 0$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，则 $f(x)_{\max}=f(1)=1-a=\frac{3}{4}$，所以 $a=\frac{1}{4}$ 不成立;

②$0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{a}{2},a\right]$ 上单调递减，在 $[a,1]$ 上单调递增

所以 $f(x)_{\max}=\max\left\{f\left(\frac{a}{2}\right),f(1)\right\}$

若$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}$，则$a^2=3$，不满足$0<a<1$；

若$f(1)=1-a=\frac{3}{4}$，则$a=\frac{1}{4}$，满足$0<a<1$；

③$1\le a<2$时，$f(x)$在$\left[0,\frac{a}{2}\right]$上单调递增，在$\left[\frac{a}{2},1\right]$上单调递减，则$f(x)_{\max}=f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}$，解得$a=\sqrt{3}$，满足$1\le a<2$；

④$a\ge 2$时，$f(x)$在$[0,1]$上单调递减，则$f(x)_{\max}=f(1)=a-1=\frac{3}{4}$，所以$a=\frac{7}{4}$不满足$a\ge 2$．

综上：$a=\frac{1}{4}$或$a=\sqrt{3}$．

22．【详解】（1）任取$x>y>0$，$f(x)-f(y)=f(x-y+y)-f(y)$．

因为$x-y>0$，故$f(x-y+y)\ge f(x-y)+f(y)$且$f(x-y)>0$．

故$f(x)-f(y)=f(x-y+y)-f(y)\ge f(x-y)>0$.故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

（2）①由题意可知：对任意正数s，都有$f(s)>0$，且$f(s)+f(t)\le f(s+t)$，

在③中令$x=y=s$，可得$f(2s)\ge 2f(s)$，即$\frac{f(2s)}{f(s)}\ge 2$；

故对任意正整数k与正数s，都有$\frac{f(2^k s)}{f(s)}=\frac{f(2^k s)}{f(2^{k-1}s)}\cdot\frac{f(2^{k-1}s)}{f(2^{k-2}s)}\cdots\cdots\frac{f(2s)}{f(s)}\ge 2^k$；

②由①可知：对任意正整数k与正数s，都有$f(2^k s)\ge 2^k f(s)$，

故对任意正整数k与正数s，都有$f(2^{k-1}s)\ge 2^{k-1}f(s)$，

令$s=2^{1-k}$，则$f(2^{1-k})\le 2^{1-k}f(1)=2^{1-k}$；

对任意$x\in(2^{k-1},2^k)(k\in\mathbf{N}^*)$，可得$\frac{1}{x}\in(2^{-k},2^{1-k})$，并且$2^{k-2}<\frac{x}{2}<2^{k-1}$，$2^{1-k}<\frac{2}{x}<2^{2-k}$，

又因为$f(1)=1$，所以由（2）中已经证明的单调性可知：

$f(x)>f(2^{k-1})\ge 2^{k-1}f(1)=2^{k-1}>\frac{x}{2}$，$f\left(\frac{1}{x}\right)<f(2^{1-k})\le 2^{1-k}<\frac{2}{x}$，

所以$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)>\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$.

【点睛】对于第二问，如何巧妙运用$f(x)+f(y)\le f(x+y)$要学习，抽象函数中经常会用到这个方法；对于第三问，可以把$2^k s$看作$\underbrace{s+s+s+\cdots+s}_{2^k}$，再运用$f(x)+f(y)\le f(x+y)$可以证明①，再利用①的结论推出$f(x)>\frac{x}{2}$，$f\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{2}{x}$．