

重庆八中 2022-2023 学年度高一（上）周日检测（四）

数学试题

命题：邓媛媛 朱俊

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | 2x - x^2 \leq 0\}$, $B = \left\{x \left| \log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 0 \right.\right\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(-1, 0)$ B. $(-1, 0]$ C. $(2, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x^2}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(m) = 3$, 则 m 的值为

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 9 D. 2 或 9

3. 函数 $f(x) = \ln x + 3x - 4$ 的零点所在的区间是

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. (e, e^2)

4. 已知 α 与 β 分别是函数 $f(x) = 2^x + x - 5$ 与 $g(x) = \log_8 x^3 + x - 5$ 的零点, 则 $2^\alpha + \log_2 \beta$ 值为

- A. $4 + \log_2 3$ B. $2 + \log_2 3$ C. 4 D. 5

5. 下列结论正确的是

- A. $2^{\sqrt{5}} < (\sqrt{5})^2$ B. $2^{\sqrt{17}} < (\sqrt{17})^2$ C. $2^{\sqrt{3}} < \log_2 \sqrt{3}$ D. $2^{\sqrt{2}} < \log_{\sqrt{2}} 2$

6. “ $a^2 = 1$ ” 是 “函数 $f(x) = \ln(1+ax) - \ln(1+x)$ 为奇函数” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 即不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x \leq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(|x|+1) - a, & x > 0 \end{cases}$, ($a \in \mathbb{R}$) 在 \mathbb{R} 上没有零点, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(1, +\infty) \cup \{0\}$ B. $[0, +\infty)$ C. $[0, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup \{0\}$

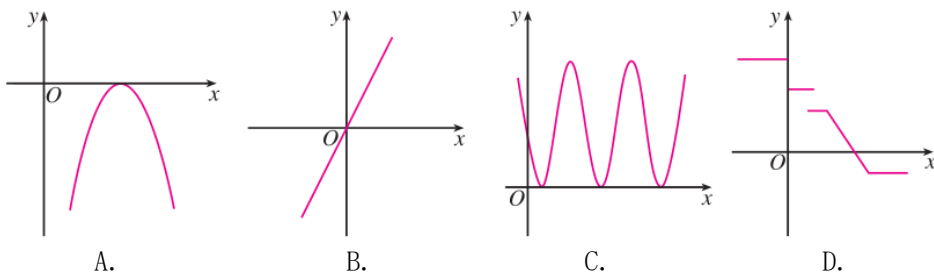
8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x \geq 0 \\ 3^x, & x < 0 \end{cases}$, 若 $x_1 < x_2 < x_3$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 则 $\frac{x_2 f(x_1)}{x_2 + x_3}$

取值范围是

- A. $(0, \frac{1}{8}]$ B. $(0, \frac{1}{4})$ C. $[0, \frac{1}{8})$ D. $(0, \frac{1}{4}]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 下列函数图象与 x 轴均有交点，其中不能用二分法求其零点的是



10. 若 $a > b > 0$, $0 < c < 1$, 则

- A. $\log_a c < \log_b c$ B. $\log_c a < \log_c b$ C. $a^c > b^c$ D. $c^a > c^b$

11. 已知定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$, 满足 $f(x) + f(2-x) = 2$, 则下列结论正确的是

A. $f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称

B. $f(3) = 1$

C. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 在区间 $[2021, 2022]$ 上单调递增

D. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上的解析式为 $f(x) = \ln x + 1$, 则 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上的解析式为 $f(x) = 1 - \ln(2-x)$

12. 已知函数 $g(x)$, $h(x)$ 分别是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数和奇函数, 且 $g(x) + h(x) = e^x - x$, 若函数 $f(x) = 3^{|x-2020|} - \lambda g(x-2020) - 2\lambda^2 (\lambda \in \mathbf{R})$, 则下列说法正确的是

A. $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ B. $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

C. 当 $\lambda = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 关于直线 $x = 2020$ 对称

D. 若函数 $f(x)$ 有唯一零点, 则实数 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 -1

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填写在答题卡相应位置．

13. 计算: $(\frac{1}{\sqrt{3}})^{-6} \times (\frac{81}{16})^{-\frac{3}{4}} - e^{\ln 2} - \log_2 3 \times \log_3 4 =$ _____.

14. 正数 a, b 满足 $2a + b = 1$, 则 $4a^2 + b^2$ 的最小值为_____.

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 图象恒过 $(1, 1)$ 点, 对任意 $x_1 < x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$,

则不等式 $f[\log_2(2^x - 1)] < 2 - \log_2(2^x - 1)$ 的解集为_____.

16. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x) = -f(2-x)$, $f(x) = f(2-x)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时 $f(x) = x^2$, 则方程 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 在 $[-8, 10]$ 上所有根的和为_____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. （本小题满分 10 分，其中第（1）问 5 分，第（2）问 5 分）

已知函数 $f(x) = \log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_3(9x)$ ．

（1）求函数 $f(x)$ 的最大值；

（2）解不等式 $f(x) < -4$ 的解集．

18. （本小题满分 12 分，其中第（1）问 5 分，第（2）问 7 分）

已知函数 $f(x) = 2^x + \frac{1}{2^{|x|}}$ ．

（1）求函数 $f(x)$ 的值域；

（2）若方程 $f(2t) + mf(t) = 0$ 在 $t \in [0, 1]$ 上有解，求实数 m 的取值范围．

19. （本小题满分 12 分，其中第（1）问 5 分，第（2）问 7 分）

碳 14 是碳的一种具有放射性的同位素，它常用于确定生物体的死亡年代，即放射性碳定年法．在活的生物体内碳 14 的含量与自然界中碳 14 的含量一样且保持稳定，一旦生物死亡，碳 14 摄入停止，生物体内的碳 14 会按指数函数的规律衰减，大约经过 5730 年衰减为原来的一半，通过测定生物遗体中碳 14 的含量就可以测定该生物的死亡年代．设生物体内的碳 14 的含量为 P ，死亡年数为 t ．（假设自然界中碳 14 的含量为 1 个单位）

（1）试将 P 表示为 t 的函数；

（2）不久前，科学家发现一块生物化石上的碳 14 的含量为自然界中碳 14 的含量的 8%，

请推算该生物死亡的年代距今多少年？（参考数据： $\lg 2 \approx 0.3$ ）

20. (本小题满分 12 分, 其中第 (1) 问 5 分, 第 (2) 问 7 分)

已知函数 $f(x) = \log_9(9^x + 1) - \frac{1}{2}x, x \in \mathbf{R}$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明;

(2) 若函数 $g(x) = 9^{\frac{f(x)+x}{2}} + m \cdot 3^x - 1, x \in [0, \log_3 2]$, 是否存在实数 m , 使得 $g(x)$ 的最小值为 0. 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 说明理由.

21. (本小题满分 12 分, 其中第 (1) 问 5 分, 第 (2) 问 7 分)

已知函数 $y = f(x), f(x) = \log_a \frac{x-2}{x+2}$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

(1) 求 $f(-2020) + f(-1010) + f(-505) + f(505) + f(1010) + f(2020)$;

(2) 若对于 $x \in [-4, -3]$, $f(x) > \log_a(a^2 - 5a + 9)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分, 其中第 (1) 问 6 分, 第 (2) 问 6 分)

已知函数 $f(x) = -x^2 + (m-2)x + 2 - m, x \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $y = |f(x)|$ 在 $[-1, 0]$ 上是减函数, 求实数 m 取值范围;

(2) 是否存在整数 a, b , 使得 $a \leq f(x) \leq b$ 的解集恰好是 $[a, b]$, 若存在, 求出 a, b 的值; 若不存在, 说明理由.