2022-2023 学年度（上）高 2023 届 9 月月考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	B	C	D	D	A	C	ABC	ABC	AC	ACD

13．$\frac{2\pi}{3}$　　14．16　　15．$(-\infty,1]$　　16．$\sqrt{229}$

7．A【详解】$\because g(x)$为偶函数，$h(x)$为奇函数，且$g(x)-h(x)=2^x$①$\therefore g(-x)-h(-x)=g(x)+h(x)=2^{-x}$②，

①②两式联立可得$g(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$，$h(x)=\frac{2^{-x}-2^x}{2}$.由$m\cdot g(x)+h(x)\le 0$得$m\le\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{4^x-1}{4^x+1}=1-\frac{2}{4^x+1}$，

$\because y=1-\frac{2}{4^x+1}$在$x\in[-1,1]$为增函数，$\therefore\left(1-\frac{2}{4^x+1}\right)_{\max}=\frac{3}{5}$.

8.D 【详解】考虑最后一个面试的同学，第 90 个面试的同学为 B 校概率为$\frac{3}{9}$，此时前面的 B 校同学不会影响结果，20 个 A 校，40 个 C 校.最后一个面试的同学为 C 校概率为$\frac{2}{3}$，第 90 个面试同学为 C 校同理.

故：

$$P=\frac{3}{9}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{22}{45}$$

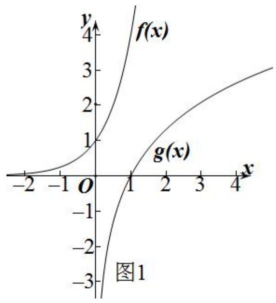


图1

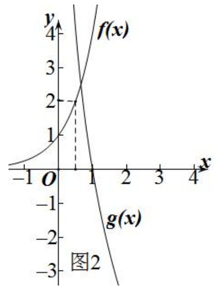


图2

9．ABC　【详解】依题意等差数列{a_n}满足 $a_{15}>0$，$a_{16}<0$，所以前 15 项为正数，第 16 项开始为负数，公差 d 为负数，前 15 项和 S_{15} 最大，所以 ABC 选项正确．$S_{31}=\frac{a_1+a_{31}}{2}\times 31=31a_{16}<0$，　所以 D 选项错误．

10．ABC　【详解】分别记函数 $f(x)=4^x$，$g(x)=\log_a x$

由图 1 知，当$a>1$时，不满足题意；当$0<a<1$时，如图 2，要使$0<x\le\frac{1}{2}$时，不等式$4^x\le\log_a x$恒成立，只需满足$f(\frac{1}{2})\le g(\frac{1}{2})$，即$4^{\frac{1}{2}}\le\log_a\frac{1}{2}$，即$2\le\log_a\frac{1}{2}$，解得$\frac{\sqrt{2}}{2}\le a<1$.

11．AC　【详解】由已知 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)=2\sin(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6})$，

因为函数$f(x)$为奇函数，所以$\varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in Z$，可得$\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，

又因为$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，又因为函数$f(x)$的周期为π，所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得$\omega=2$，

所以$f(x)=2\sin 2x$.将函数$f(x)$的图像向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得$y=g(x)=2\sin\left[2(x-\frac{\pi}{6})\right]=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，当$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，此时函数$g(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$不单调，

当$x=-\frac{\pi}{12}$时，$g(-\frac{\pi}{12})=2\sin\left[2\times(-\frac{\pi}{12})-\frac{\pi}{3}\right]=2\sin(-\frac{\pi}{2})=-2$，所以$x=-\frac{\pi}{12}$是函数$g(x)$的一条对称轴，

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以$\sin(2x-\frac{\pi}{3})\in\left[-\frac{\sqrt3}{2},1\right]$，所以$2\sin(2x-\frac{\pi}{3})\in\left[-\sqrt3,2\right]$

12．ACD　【详解】对于 C，由$a_{n+1}=a_n\ln(2-a_{n+1})$知：$n=1$ 时，$a_2=a_1\ln(2-a_2)$，假设$a_2\leqslant 0$，

则$a_2=a_1\ln\left(2-a_2\right)>0$，矛盾，所以$a_2>0$，类推可知：$a_n>0$，又设$f(x)=\ln x-(x-1),x>0$，

$f'(x)=\frac{1-x}{x},x\in(0,1),f'(x)>0,x\in(1,+\infty),f'(x)<0$，故$f(x)_{\max}=f(1)=0,\therefore f(x)\le 0,$　即$x>0$时，$\ln x\le x-1$，

因此$\ln(2-a_{n+1})\le 1-a_{n+1}$，即$a_{n+1}=a_n\ln(2-a_{n+1})\le a_n(1-a_{n+1})$，整理得：$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\ge 1,\therefore\frac{1}{a_{n+1}}\ge 1+\frac{1}{a_n}$，

因为$a_n>0$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}>1,\therefore 0<a_{n+1}<1(n\in\mathrm{N}^*),0<a_n<1$，所以$0<a_n<1(n\in\mathrm{N}^*)$成立，

对于 A，由$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\ge 1$，$(n\in\mathbf{N}^*)$，用累加法可得：$\frac{1}{a_n}\ge\frac{1}{a_1}+(n-1)=(\frac{1}{a_1}-1)+n>n$，

所以$S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}>1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，对于 B，由$\frac{1}{a_n}>n$知$a_n<\frac{1}{n}$，所以$a_{2022}<\frac{1}{2022}$，

对于 D，由$a_1=\frac{1}{3}$，用累加法可得$\frac{1}{a_n}\ge\frac{1}{a_1}+(n-1)=(\frac{1}{a_1}-1)+n\ge n+2$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ln(2-a_{n+1})>\ln\left(2-\frac{1}{n+3}\right)>\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$

n 取$1,2,\cdots n-1$，累乘可得：$a_n\ge a_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$.

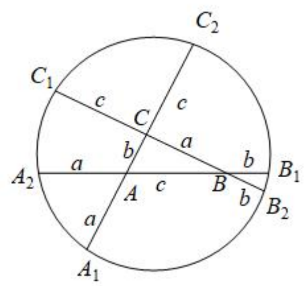
15．$(-\infty,1]$　【详解】由题意知，$f(x)=x\ln x$，当$x\ge 1$时，$f(x)\ge ax-1$恒成立，

即$a\le\ln x+\frac{1}{x}(x\ge 1)$恒成立，令$h(x)=\ln x+\frac{1}{x}(x\ge 1)$，则$a\le h(x)_{\min}$恒成立，

$\because h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，$\therefore$当$x\ge 1$时，$h'(x)\ge 0$，$\therefore h(x)=\ln x+\frac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=1$，$\therefore a\le 1$，即实数a的取值范围为$(-\infty,1]$.

16．$\sqrt{229}$　【详解】解：因为$|CC_1|=|CC_2|$，$|CA_1|=|CB_2|$，所以康威圆的圆心在$\angle ACB$的平分线上，同理可知康威圆的圆心在$\angle ABC$的平分线上，即康威圆的圆心为$\triangle ABC$的内心．因为$a=12$，$b=5$，$c=13$，满足$a^2+b^2=c^2$，所以$\angle ACB=90°$，所以$\triangle ABC$的内切圆的半径$r=\frac{5+12-13}{2}=2$，所以，半径$R=\sqrt{r^2+\left(\frac{5+12+13}{2}\right)^2}=\sqrt{229}$.



17．（1）①$n=1$时，$a_1=S_1=2a_1-3$，得$a_1=3$，①$n\ge 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-3-\left(2a_{n-1}-3\right)$，得$a_n=2a_{n-1}$，

故$\{a_n\}$是首项为 3，公比为 2 的等比数列，$a_n=3\cdot 2^{n-1}$

（2）由（1）得$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$，故$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})=\frac{1}{3}(2-\frac{1}{2^{n-1}})<\frac{13}{20}$

整理得$(\frac{1}{2})^{n-1}>\frac{1}{20}$，即$2^n<40$，而$2^5=32,2^6=64$，故$n$的最大值为5

18．（1）由$2c\cos A\cos B+a=-2b\cos A\cos C$根据正弦定理得：$2\sin C\cos A\cos B+\sin A+2\sin B\cos A\cos C=0$，

即$2\cos A\left(\sin C\cos B+\cos C\sin B\right)=-\sin A$，故$2\cos A\sin\left(B+C\right)=-\sin A$，$\because A+B+C=\pi$，$\therefore 2\cos A\sin A=-\sin A$，

因为$0<A<\pi$，所以$\sin A\neq 0$，所以$\cos A=-\dfrac{1}{2}$，且$A\in\left(0,\pi\right)$，所以$A=\dfrac{2\pi}{3}$，故若$B=\dfrac{\pi}{6}$，则$C=\pi-A-B=\dfrac{\pi}{6}$；

（2）在$\triangle ABC$中，因为$BC=3BD=\sqrt{3}AB, A=\dfrac{2\pi}{3}$，所以$a=\sqrt{3}c$，由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即$b^2+bc-2c^2=0$，解得$b=c$（$b=-2c$舍去）.因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{AD}^2=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2$，即$3^2=\dfrac{4}{9}c^2+2\times\dfrac{2}{9}cb\cos\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{1}{9}b^2$，因为$b=c$，所以$3^2=\dfrac{3}{9}c^2$，解得$c^2=27, c=3\sqrt{3}$，

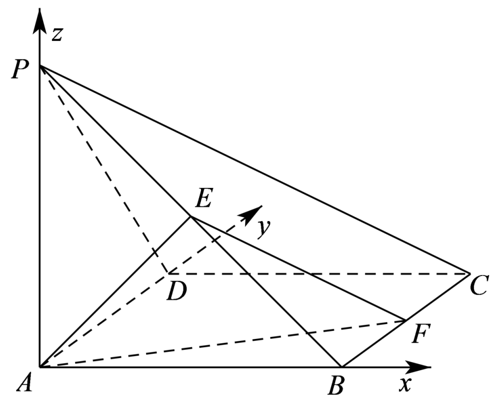
所以$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 27\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.

19．（1）∵$PA\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，∴$PA\perp BC$，

∵$ABCD$为正方形，∴$AB\perp BC$，又 $PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$平面PAB，∴$BC\perp$平面PAB，∴$AE\subset$平面PAB，∴$AE\perp BC$，

∵$PA=AB$，E为线段PB的中点，∴$AE\perp PB$，又 $PB\cap BC=B$，PB，$BC\subset$平面PBC，∴$AE\perp$平面PBC，

又$AE\subset$平面AEF，所以平面$AEF\perp$平面PBC；



(2)以A为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$，

设正方形$ABCD$的边长为2，则A（0，0，0），B（2，0，0），C（2，2，0），D（0，2，0）P（0，0，2）

E（1，0，1），∴$\overrightarrow{AE}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$，设$F$（2，$\lambda$，0）（$0\le\lambda\le2$），∴$\overrightarrow{AF}=(2,\lambda,0)$，

设平面AEF的一个法向量为$\vec{n}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，∴$\begin{cases}x_1+z_1=0\\ 2x_1+\lambda y_1=0\end{cases}$，令$y_1=2$，则$\begin{cases}x_1=-\lambda\\ z_1=\lambda\end{cases}$，∴$\vec{n}=(-\lambda,2,\lambda)$，

设平面PCD的一个法向量为$\vec{m}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，∴$\begin{cases}x_2+y_2-z_2=0\\ y_2-z_2=0\end{cases}$，令$y_2=1$，则$\begin{cases}x_2=0\\ z_2=1\end{cases}$，∴$\vec{m}=\left(0,1,1\right)$，

∵平面AEF与平面PCD所成的锐二面角为30°，∴$\left|\cos 30°\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|2+\lambda\right|}{\sqrt{2}\times\sqrt{2\lambda^2+4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得$\lambda=1$，

∴当点F为BC中点时，平面AEF与平面PCD所成的锐二面角为30°.

20．（1）函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-m\ln x$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$m>0$

所以$f'\left(x\right)=\dfrac{x^2-m}{x}=\dfrac{\left(x+\sqrt{m}\right)\left(x-\sqrt{m}\right)}{x}$，令$f'\left(x\right)=0$可得$x=\sqrt{m}$，

当$0<x<\sqrt{m}$时，$f'\left(x\right)<0$，函数$f\left(x\right)$单调递减，当$x>\sqrt{m}$时，$f'\left(x\right)>0$，函数$f\left(x\right)$单调递增，综上，函数$f\left(x\right)$

的单调递增区间是$\left(\sqrt{m},+\infty\right)$，单调递减区间是$\left(0,\sqrt{m}\right)$.

（2）令$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)=-\frac{1}{2}x^{2}-m\ln x+\left(m+1\right)x$，$x>0$，则函数$f\left(x\right)$与$g\left(x\right)$图像交点的个数与$h\left(x\right)$的零点的个数相等，$h'\left(x\right)=-\frac{\left(x-1\right)\left(x-m\right)}{x}$，令$h'\left(x\right)<0$，解得$1<x<m$，

令$h'\left(x\right)<0$，解得$0<x<1$或$x>m$，所以$h\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，在$\left(1,m\right)$上单调递增，在$\left(m,+\infty\right)$上单调递减，

注意到$h\left(1\right)=m+\frac{1}{2}>0$，$h\left(2m+2\right)=-m\ln\left(2m+2\right)<0$，

所以$h\left(x\right)$有唯一零点．综上，函数$h\left(x\right)$有唯一零点，即两函数图象总有一个交点．

21．（1）解：由题得$a=2,\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\therefore a=2,c=1,\therefore b=\sqrt{3},$所以椭圆$E$的方程为$\frac{x^{2}}{4}+\frac{y^{2}}{3}=1$．

（2）解：要证$\angle PAN+\angle POM=90°$，只需证$\angle PAN=90°-\angle POM$，

只需证明$\tan\angle PAN=\frac{1}{\tan\angle POM},$只需证明$\tan\angle PAN\cdot\tan\angle POM=1,$只需证明$k_{AN}\cdot k_{OM}=1,$

设$M(6,m),N(6,n)$，只需证明$\frac{n}{6-2}\cdot\frac{m}{6}=1,$只需证明$mn=24$.

设直线l的方程为$y=k(x-6)$，$k\neq0$，联立椭圆方程$\frac{x^{2}}{4}+\frac{y^{2}}{3}=1$得$(3+4k^{2})x^{2}-48k^{2}x+144k^{2}-12=0$，设$B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，所以$\Delta>0,x_1+x_2=\frac{48k^{2}}{3+4k^{2}},x_1x_2=\frac{144k^{2}-12}{3+4k^{2}}$，

又A,B,M三点共线，所以$\frac{m}{4}=\frac{y_1}{x_1-2},\therefore m=\frac{4y_1}{x_1-2}$，同理$n=\frac{4y_2}{x_2-2}$，

所以$mn=\frac{4y_1}{x_1-2}\times\frac{4y_2}{x_2-2}=\frac{16k^{2}(x_1-6)(x_2-6)}{(x_1-2)(x_2-2)}$，所以$mn=\frac{16k^{2}[x_1x_2-6(x_1+x_2)+36]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

所以$mn=\frac{16k^{2}[\frac{144k^{2}-12}{3+4k^{2}}-6\times\frac{48k^{2}}{3+4k^{2}}+36]}{\frac{144k^{2}-12}{3+4k^{2}}-2\times\frac{48k^{2}}{3+4k^{2}}+4}=\frac{16k^{2}\times96}{64k^{2}}=24$.所以$\angle PAN+\angle POM=90°$．

22.解：（1）由题意$P\left(E_5\right)=\frac{\left(\frac{C_5^1C_4^1C_3^3}{A_2^2}+\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}\right)A_3^3}{3^5}=\frac{50}{81}$. $P\left(F_4\right)=1-\frac{1+1}{2^4}=\frac{7}{8}$,

①由题意可知：$Q_1=\frac{2}{3}$,当$n\geq2$时，$Q_n=\frac{1}{2}\left(1-Q_{n-1}\right)+\frac{1}{4}Q_{n-1}$，所以$Q_n-\frac{2}{5}=-\frac{1}{4}\left(Q_{n-1}-\frac{2}{5}\right)$，所以$\left\{Q_n-\frac{2}{5}\right\}$是以$\frac{4}{15}$为首项，$-\frac{1}{4}$为公比的等比数列,$\therefore Q_n=\frac{4}{15}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{2}{5}$

②因为每天购买盲盒的100人都已购买过很多次，所以，对于每一个人来说，某天来购买盲盒时，可以看作n趋向无穷大，所以购买甲系列的概率近似于$\frac{2}{5}$，假设用ξ表示一天中购买甲系列盲盒的人数，则$\xi\sim B\left(100,\frac{2}{5}\right)$.

所以$E\left(\xi\right)=100\times\frac{2}{5}=40$.即购买甲系列的人数的期望为40，所以礼品店应准备甲系列盲盒40个，乙系列盲盒60个.