

2020—2021 学年度第二学期 6 月考试

高 2023 届 · 数学试题

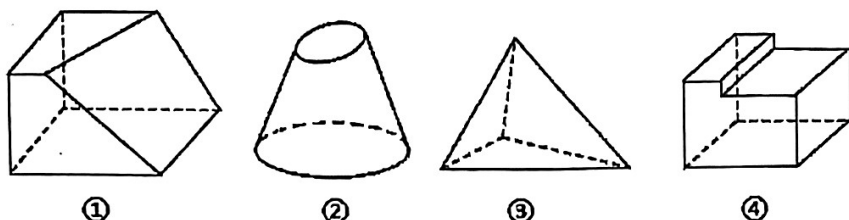
(满分 150 分, 120 分钟完成)

一、单项选择题 (本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个符合题目要求)

1. 已知复数 $z = \frac{1-3i}{1-i}$ (i 为虚数单位), 则复数 z 在复平面上对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 如图所示, 观察四个几何体, 其中判断正确的是 ()



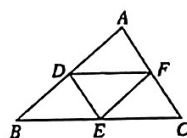
- A. ①是棱台 B. ②是圆台 C. ③是四面体 D. ④不是棱柱

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sqrt{3}AC = \sqrt{2}BC$, 且 $\angle A = \frac{\pi}{3}$, 则 $\angle C =$ ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{5\pi}{12}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{7\pi}{12}$

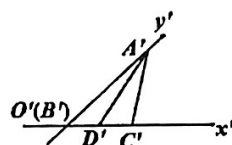
4. 如右图, D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC, CA 的中点, 则 ()

- A. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}$ B. $\vec{BD} - \vec{CF} + \vec{DF} = \vec{0}$
C. $\vec{AD} + \vec{CE} - \vec{CF} = \vec{0}$ D. $\vec{BD} - \vec{BE} - \vec{FC} = \vec{0}$



5. 用斜二测画法画水平放置的 $\triangle ABC$ 的直观图 $\triangle A'B'C'$ 如图所示, 则在 $\triangle ABC$ 的三边及中线 AD 中, 最长的线段是 ()

- A. AB B. AD
C. BC D. AC



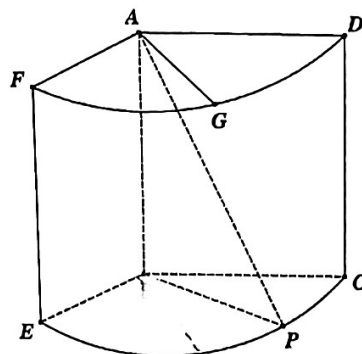
第5题图

6. 如图, 几何体是圆柱的一部分, 它是由矩形 $ABCD$ (及其内部) 以 AB 边所在直线为旋转轴旋转 120° 得到的, G 是 DF 的中点, 设 P 是 CE 上的一点, 且 $AP \perp BE$, 则 AG 与 BP 所成角的大小为 ()

- A. 45° B. 15°
C. 30° D. 0°

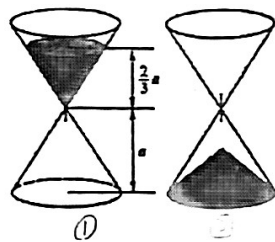
7. 设复数 z , 满足 $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$, $z_1 + z_2 = \sqrt{3} - i$, 则 $|z_1 - z_2| =$ ()

- A. 4 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{6}$ D. 2



第6题图

8. 沙漏也叫沙钟，是一种测量时间的装置，基本模型可以看成是由两个圆锥组成，圆锥的底面直径和高均为 a ，细沙全部在上部时，其高度为圆锥高度的 $\frac{2}{3}$ ，当细沙全部漏入下部的圆锥后，恰好堆成一个盖住沙漏底部的圆锥形沙堆，则此沙堆的侧面积与细沙全都在上部时的圆锥侧面积之比为（ ）



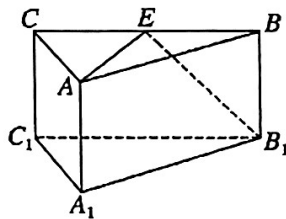
- A. $\frac{\sqrt{197}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{127}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{197}}{12}$ D. $\frac{\sqrt{127}}{12}$

二、多项选择题（本题共4个小题，每小题5分，共20分。每小题给出的四个选项中，有多个符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得3分，有选错的得0分）

9. 设 a, b 是两条不重合的直线， α, β 是两个不同的平面。下列四个命题中，正确的是（ ）

- A. 若 $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$ ，则 $a \parallel b$ B. 若 $a \perp \alpha, b \perp \alpha$ ，则 $a \perp b$
C. 若 $a \perp \alpha, a \perp \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ D. 若 $a \perp \alpha, b \parallel \alpha$ ，则 $a \perp b$

10. 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面三角形 $A_1B_1C_1$ 是正三角形， E 是 BC 的中点，则下列叙述正确的是（ ）



- A. 直线 CC_1 与直线 B_1E 相交
B. CC_1 与 AE 共面
C. AE 与 B_1C_1 是异面直线但不垂直
D. 平面 AB_1E 垂直于平面 CBB_1C_1

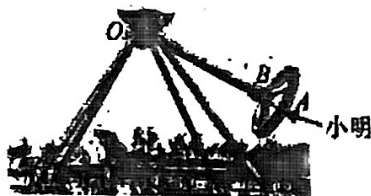
11. 下列结论正确的是（ ）

- A. 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$ ，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形。
B. 若 P, A, B 三点满足 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ ，则 P, A, B 三点共线。
C. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A > \sin B$ ，则一定可以推出 $A > B$ 。
D. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\tan A}{\tan B}$ ，则 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形。

12. 如图：今年五一，小明去某游乐园玩“大摆锤”，他坐在 A 处，“大摆锤”启动后，主轴 OB 在平面 α 内绕点 O 左右摆动，平面 α 与水平地面垂直， OB 摆动的过程中，点 A 在平面 β 内绕点 B 作圆周运动，并且

始终保持 $OB \perp \beta, B \in \beta$ 。已知 $OB = 6AB$ ，在“大摆锤”启动后，下列结论中正确的有（ ）

- A. 点 A 在某个定球面上运动；
B. 线段 AB 在水平地面上的正投影的长度为定值
C. 直线 OA 与平面 α 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{37}}{37}$
D. β 与水平地面所成角记为 θ ，直线 OB 与水平地面所成角记为 δ ，当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时， $\theta + \delta$ 为定值。

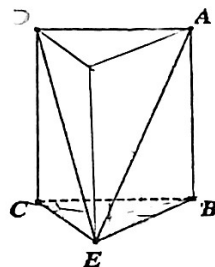


三、填空题（本大题共4个小题，每小题5分，共20分）

13. \bar{Z} 为 Z 的共轭复数，如果 $Z = \frac{2}{1+i}$ ，那么 $\bar{Z}^{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (1, 3)$ ， $|\overrightarrow{OB}| = 2$ ，若 $(3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OB} = 10$ ，则向量 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 夹角的余弦值为 .

15. 如右图的多面体中， $ABCD$ 为矩形， $CE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB=2$ ， $BC=CE=1$ ，通过添加一个三棱锥可以将该多面体补成一个直三棱柱，那么，添加的三棱锥的体积为 ，补形后的直三棱柱的外接球的表面积为 .



16. $\triangle ABC$ 外接圆圆心为 O ， a, b, c 分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边，若 $b^2 - 2b + c^2 = 0$ ，则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO}$ 的取值范围为 .

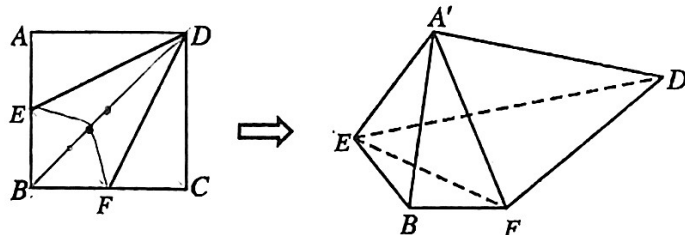
四、解答题：（本大题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。）

17. （本小题满分10分）已知 $\vec{a} = (1, t)$ ， $\vec{b} = (-3, 2)$ 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ，分别求当 k 为何值时，

- (I) $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - 3\vec{b}$ 垂直 (II) $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - 3\vec{b}$ 平行

18. （本小题满分12分）如图，边长为2的正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 AB 的中点，点 F 是 BC 的中点，将 $\triangle AED$ 、 $\triangle DCF$ 分别沿 DE 、 DF 折起，使 A 、 C 两点重合于点 A' ，连接 EF ， $A'B$ 。

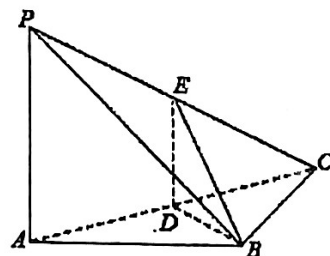
- (I) 求异面直线 $A'D$ 与 EF 所成的角，(II) 求 A' 到平面 $EBFD$ 的距离。



19. （本小题满分12分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp AB$ ， $PA \perp BC$ ， $AB \perp BC$ ，

$PA = 2\sqrt{3}$ ， $AB = BC = \sqrt{2}$ ， D 为线段 AC 的中点， E 为线段 PC 上一点。

- (I) 求证： $BD \perp PC$ ；
(II) 当 $PA \parallel$ 平面 BDE 时，求直线 EB 与平面 ABC 所成的角。



20. (本小题满分 12 分) 在① $2c \cos B = 2a - b$, ② $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$, 这两个条件中任

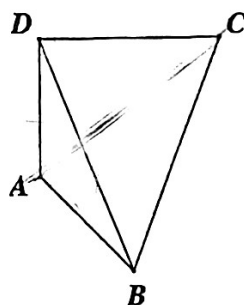
选一个, 补充在下面的问题中, 并加以解答. (如果选择多个条件作答, 则按所选的第一个条件给分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且_____.

(I) 求角 C 的大小; (II) 若 $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

21. (本小题满分 12 分) 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AD \perp CD$, $\angle BAD = \frac{3\pi}{4}$, $2AB = BD = 4$

(I) 求 $\sin \angle ADB$, (II) 若 $BC = \sqrt{22}$, 求 CD .



22. (本小题满分 12 分) 如图, 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, M 为 AA_1 的中点, N 为 A_1D 上一点, $BD \parallel$ 平面 CMN , $BD \perp CM$.

(I) 求证: $AA_1 \perp BD$

(II) 若 $AA_1 = 4$, $MN = 2$ ①求证: 该平行六面体为直四棱柱; ②求二面角 $C - MN - D$.

