

重庆外国语学校

2022-2023 学年（上）高 2023 届 9 月检测

数学试题

（满分 150 分， 120 分钟完成）

命题人	荣 仲
审题人	姜 婷

一、单选题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请将正确答案的代号填涂在答题卡上。

1. 已知复数 $z=1-i$ ，则 $|\bar{z}+i|$ = ()

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{7}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_{n+1}=2a_n+1$ ，其中 $a_8=\frac{9}{2}$ ，则 a_3 = ()

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$

3. 已知函数 $f(x)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x-\cos x$ ，则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为 ()

- A. $-\sqrt{3}$ B. 0 C. 1 D. $\sqrt{3}$

4. 已知 $a=e^{\ln 3-\ln 2}$, $b=2\sin^2 50^\circ$, $c=\log_2 5$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a>b>c$ B. $c>b>a$ C. $c>a>b$ D. $b>c>a$

5. 设 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点， $\overline{BC}=3\overline{CD}$ ，则 \overline{AD} = ()

- A. $\frac{4}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}$ B. $\frac{4}{3}\overline{AB}-\frac{1}{3}\overline{AC}$ C. $\frac{1}{3}\overline{AB}-\frac{4}{3}\overline{AC}$ D. $-\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{4}{3}\overline{AC}$

6. 下图是战国时期的一个铜铍，其由两部分组成，前段是高为 2cm、底面边长为 1cm 的正三棱锥，后段是高为 0.6cm 的圆柱，圆柱底面圆与正三棱锥底面的正三角形内切，则此铜铍的体积约为 ()

- A. 0.25cm^3 B. 0.65cm^3 C. 0.15cm^3 D. 0.45cm^3



7. 已知 $g(x)$ 为偶函数， $h(x)$ 为奇函数，且满足 $g(x)-h(x)=2^x$. 若存在 $x\in[-1,1]$ ，使得不等式

$m\cdot g(x)+h(x)\leq 0$ 有解，则实数 m 的最大值为 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. 1 D. -1

8. 有 90 位学生参加面试, 学生来自 A,B,C 三校, 其中 A 校 20 人, B 校 30 人, C 校 40 人, 面试时每次都从尚未面试的学生中抽取一位, 面试完毕以后在选择下一位面试, 则 A 校学生先于其他两校学生完成面试的概率是 ()

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{11}{15}$ C. $\frac{22}{45}$ D. $\frac{23}{45}$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n , 若 $a_{15} > 0$, $a_{16} < 0$, 则 ()

- A. $a_1 > 0$ B. $d < 0$
C. 前 15 项和 S_{15} 最大 D. 从第 32 项开始, $S_n < 0$

10. 当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, $4^x \leq \log_a x$, 则 a 的值可以为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\sqrt{2}$

11. 已知奇函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的周期为 π , 将函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得到函数 $y = g(x)$ 的图像, 则下列结论正确的是 ()

- A. 函数 $g(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ B. 函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增
C. 函数 $g(x)$ 的图像关于直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 对称 D. 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 函数 $g(x)$ 的最大值是 $\sqrt{3}$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $0 < a_1 < 1$, $a_{n+1} = a_n \ln(2 - a_{n+1})$ ($n \in \mathbb{N}^*$), S_n 为数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和, 则下列结论正确的是 ()

- A. $S_n > \frac{n(n+1)}{2}$ B. $a_{2022} > \frac{1}{2022}$
C. $0 < a_n < 1$ D. 若 $a_1 = \frac{1}{3}$, 则 $a_n \geq \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

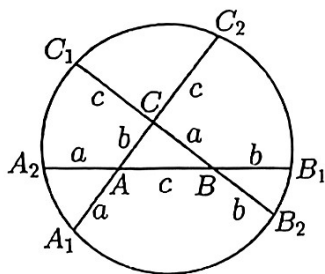
13. 已知非零向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为_____.

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_3 = 2, a_3 + a_5 = 4$, 则 $a_7 + a_9 =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = x \ln x$. 若对所有 $x \geq 1$ 都有 $f(x) \geq ax - 1$, 则实数 a 的取值范围为_____.

16. “康威圆定理”是英国数学家约翰·威廉引以为豪的研究成果之一, 定理的内容如下: 如图, $\triangle ABC$ 的三条边长分别为 $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$. 延长线段 CA 至点 A_1 , 使得 $|AA_1| = a$, 延长线段 AC 至点 C_2 , 使得 $|CC_2| = c$, 以此类推得到点 A_2, B_1, C_1, B_2 , 那么这六个点共圆, 这个圆称为康威圆. 已知 $a = 12$,

$b=5$, $c=13$, 则由 $\triangle ABC$ 生成的康威圆的半径为_____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，其中 17 题 10 分，18、19、20、21、22 题各 12 分，把解答过程写在答题卡相应位置上.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2a_n - 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{13}{20}$, 求满足条件的最大整数 n .

18. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $2c \cos A \cos B + a = -2b \cos A \cos C$.

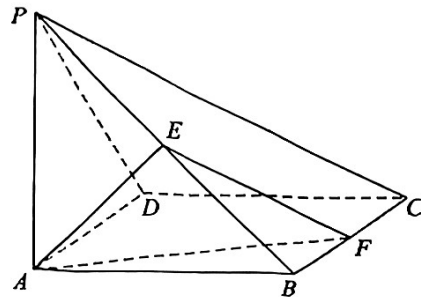
(1) 若 $B = \frac{\pi}{6}$, 求 C ;

(2) 若 D 为 BC 边上一点，且 $BC = 3BD = \sqrt{3}AB, AD = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AB$, E 为线段 PB 的中点， F 为线段 BC 上的动点.

(1) 求证：平面 $AEF \perp$ 平面 PBC ;

(2) 试确定点 F 的位置，使平面 AEF 与平面 PCD 所成的锐二面角为 30° .



20. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - m \ln x$, $g(x) = x^2 - (m+1)x$, $m > 0$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $m > 1$ 时，讨论函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的交点个数.

21. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 $A(2, 0)$, 离心率为 $\frac{1}{2}$. 过点 $P(6, 0)$ 与 x 轴不重合的直线 l 交椭圆 E 于不同的两点 B, C , 直线 AB, AC 分别交直线 $x = 6$ 于点 M, N .

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 O 为原点. 求证: $\angle PAN + \angle POM = 90^\circ$

22. 购买盲盒, 是当下年轻人的潮流之一. 每个系列的盲盒分成若干个盒子, 每个盒子里面随机装有一个动漫、影视作品的周边, 或者设计师单独设计出来的玩偶, 消费者不能提前得知具体产品款式, 具有随机属性. 消费者的目标是通过购买若干个盒子, 集齐该套盒的所有产品. 现有甲、乙两个系列的盲盒, 每个甲系列盲盒可以开出玩偶 A_1, A_2, A_3 中的一个, 每个乙系列盲盒可以开出玩偶 B_1, B_2 中的一个.

(1)、记事件 E_n : 一次性购买 n 个甲系列盲盒后集齐 A_1, A_2, A_3 玩偶; 事件 F_n : 一次性购买 n 个乙系列盲盒后集齐 B_1, B_2 玩偶; 求概率 $P(E_5)$ 及 $P(F_4)$;

(2)、某礼品店限量出售甲、乙两个系列的盲盒, 每个消费者每天只有一次购买机会, 且购买时, 只能选择其中一个系列的一个盲盒. 通过统计发现: 第一次购买盲盒的消费者购买甲系列的概率为 $\frac{2}{3}$, 购买乙

系列的概率为 $\frac{1}{3}$; 而前一次购买甲系列的消费者下一次购买甲系列的概率为 $\frac{1}{4}$, 购买乙系列的概率为 $\frac{3}{4}$;

前一次购买乙系列的消费者下一次购买甲系列的概率为 $\frac{1}{2}$, 购买乙系列的概率为 $\frac{1}{2}$; 如此往复, 记某人

第 n 次购买甲系列的概率为 Q_n .

①求 Q_n ;

②若每天购买盲盒的人数约 100, 且这 100 人都已购买过很多次这两个系列的盲盒, 试估计该礼品店每天应准备甲、乙两个系列的盲盒各多少个?