

# 2021-2022 学年度（上）

## 高 2023 届·半期考试数学试卷参考答案

### 一、单选题

1	2	3	4	5	6	7	8
B	B	A	D	C	D	C	A

### 二、多选题

9	10	11	12
AB	CD	ABD	BD

12. 解析： A 选项；

作 N 关于平面 EFGH 的对称点  $N_1$ ，联结  $AN_1$ ，设  $AN_1$  与平面 EFGH 交于点 Q，此时

点 Q 为 EG 与  $AN_1$  的交点，则  $QA+QN=QA+QN_1=AN_1=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{17}$ ，

$GQ=\frac{1}{3}EG=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ， $OQ=\frac{\sqrt{2}}{3}<1$ ，此时点 Q 在  $\odot O$  的内部。

因为点 P 在  $\odot O$  上，所以  $PA+PN>AN_1=\sqrt{17}$ ，故 A 错误

B 选项；

方法一：以正方体的中心  $O_1$  为坐标原点，如图所示建立坐标系，

则  $A(1,-1,-1)$ ， $N(-1,1,0)$ ，设  $M(-1,1,t)$ ， $P(\cos\theta,\sin\theta,1)$

$\overrightarrow{AP}=(\cos\theta-1,\sin\theta+1,2)$ ， $\overrightarrow{PM}=(-1-\cos\theta,1-\sin\theta,t-1)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PM}=1-\cos^2\theta+1-\sin^2\theta+2t-2=0$ ， $t=\frac{1}{2}$

故，存在一点 M 为 GN 的中点，总使得  $AP\perp PM$ 。故 B 正确

C 选项；

$\overrightarrow{PA}=(1-\cos\theta,-\sin\theta-1,-2)$ ， $\overrightarrow{PN}=(-1-\cos\theta,1-\sin\theta,-1)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PN}=\cos^2\theta-1+\sin^2\theta-1+2=1>0$ ，

故  $\angle APN$  不可能为直角。故 C 选项错误。

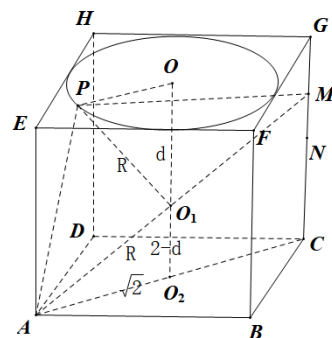
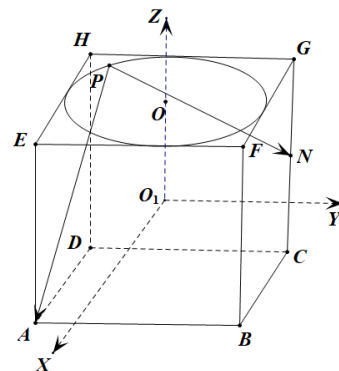
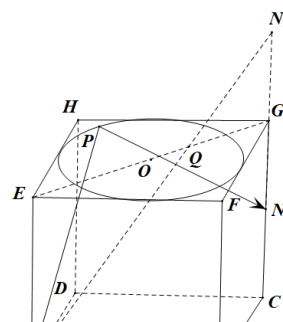
D 选项；

方法一：

由

$\overrightarrow{PA}=(1-\cos\theta,-\sin\theta-1,-2)$ ， $\overrightarrow{PN}=(-1-\cos\theta,1-\sin\theta,-1)$ ， $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PN}=\cos^2\theta-1+\sin^2\theta-1+2=1$ ，为定值

又  $|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PN}|=\sqrt{7+2(\sin\theta-\cos\theta)}\cdot\sqrt{4-2(\sin\theta-\cos\theta)}$



由均值不等式,  $|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PN}| \leq \frac{7+2(\sin \theta - \cos \theta)+4-2(\sin \theta - \cos \theta)}{2} = \frac{11}{2}$

由  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PN} = 1 > 0$  可知  $\angle APN$  始终为锐角. 当  $\cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PN} \rangle$  最小时, 面积最大.

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PN} \rangle = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PN}|} \geq \frac{2}{11}, \sin \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PN} \rangle \leq \frac{3\sqrt{13}}{11}$$

$$S_{\triangle APN} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PN}| \sin \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PN} \rangle \leq \frac{1}{2} \times \frac{11}{2} \times \frac{3\sqrt{13}}{11} = \frac{3\sqrt{13}}{4}$$

当  $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{3}{4}$  时, 等号成立.

### 三、填空题:

13	14	15	16
$15^\circ$	$30^\circ$	$\frac{4\sqrt{17}}{17}$	$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \frac{3\pi}{4}$

### 四、解答题:

17. :  $a = 0$  或  $a = -3$

$$d = \frac{\left| \frac{1}{2} + 1 \right|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

18. 解: (2)  $x - y + 2 = 0$ .

19. 解: (1) 方法一: 因为三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  是直三棱柱, 所以  $BB_1 \perp$  底面  $ABC$ ,

所以  $BB_1 \perp AB$ , 因为  $A_1B_1 \parallel AB$ ,  $BF \perp A_1B_1$ , 所以  $BF \perp AB$ ,

又  $BB_1 \cap BF = B$ , 所以  $AB \perp$  平面  $BCC_1B_1$ . 所以  $BA, BC, BB_1$  两两垂直.

以  $B$  为坐标原点, 分别以  $BA, BC, BB_1$  所在直线为  $x, y, z$  轴建立空间直角坐标系,

图. 所以  $B(0,0,0), A(2,0,0), C(0,2,0), B_1(0,0,2), A_1(2,0,2), C_1(0,2,2)$ ,

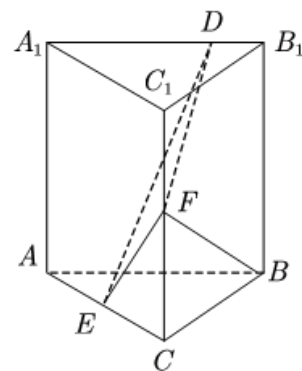
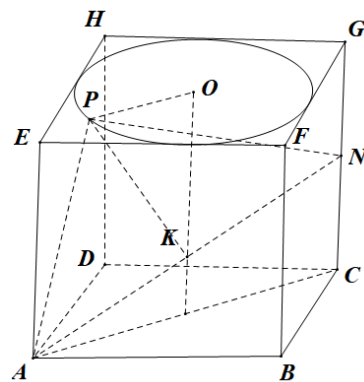
$E(1,1,0), F(0,2,1) D(a,0,2)$ . 由题设因为

$$\overrightarrow{BF} = (0,2,1), \overrightarrow{DE} = (1-a,1,-2),$$

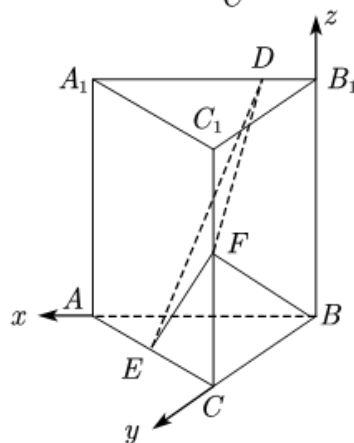
所以  $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \times (1-a) + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0$ , 所以  $BF \perp DE$ .

故异面直线  $DE$  与  $BF$  的夹角为  $90^\circ$

(2) 设平面  $DFE$  的法向量为  $\vec{m} = (x, y, z)$ ,



如



因为  $A_1B_1=4B_1D$ ，所以  $D\left(\frac{1}{2}, 0, 2\right) \overrightarrow{EF} = (-1, 1, 1), \overrightarrow{DE} = \left(\frac{1}{2}, 1, -2\right)$ ,

$$\text{所以} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y - 2z = 0 \end{cases} \cdot \text{即} \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}, \text{令 } z = 1, \text{ 则 } \vec{m} = (2, 1, 1)$$

因为平面  $BCC_1B_1$  的法向量为  $\overrightarrow{BA} = (2, 0, 0)$ ,

设平面  $BCC_1B_1$  与平面  $DEF$  的二面角的平面角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{BA}|}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} = \frac{4}{\sqrt{6} \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ 所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

故;平面  $BB_1C_1C$  与平面  $DFE$  所成的二面角的正弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**20. 解:** (1) 圆  $C_1$  过点  $(-1, 0)$  和  $(1, 0)$ , 所以圆心在  $y$  轴上, 又圆心在直线  $l: x - y - 1 = 0$  上

所以圆心坐标为  $(0, -1)$  且半径为  $\sqrt{2}$ , 则圆  $C_1$  的方程为  $x^2 + (y + 1)^2 = 2$

因为两圆心距离  $|C_1C_2| = 3\sqrt{2}$  大于两圆半径的和, 所以两圆的位置关系为相离.

(2) 设直线  $l$  上是存在点  $P$  满足题意, 设  $P(x, x - 1)$ ,

$$\text{由 } 2|PA| = |PB| \text{ 可知, } 4PA^2 = PB^2$$

$$\text{即 } 4(PC_1^2 - 2) = PC_2^2 - 2, \text{ 所以 } 4PC_1^2 - 6 = PC_2^2$$

$$\text{即 } 4x^2 + 4x^2 - 6 = (x - 3)^2 + (x + 3)^2$$

$$\text{整理得 } x^2 - 4 = 0, \text{ 解得 } x = \pm 2$$

所以  $P(2, 1)$  或  $P(-2, -3)$ , 经检验符合条件。

综上所述, 存在点  $P(2, 1)$  或  $P(-2, -3)$ , 使得  $2|PA| = |PB|$

**21. 解:** (1) 方法一: 取  $BE$  中点为  $K$ , 连接  $FK, AC$ ;

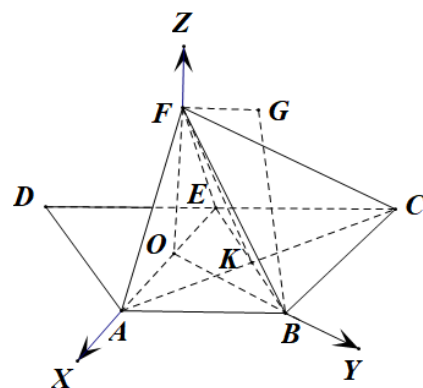
当  $FB=BC$  时, 由已知可知  $\triangle FAE, \triangle BAE, \triangle BFE$  为全等的等边三角形;

$\therefore AC \perp BE, FK \perp BE$ ; 又  $AC \subset$  面  $AFC, FK \subset$  面  $AFC$

$\therefore BE \perp$  平面  $AFC$

方法二: 当  $FB=BC$  时, 由已知可知  $\triangle FAE, \triangle BAE, \triangle BFE$  为全等的等边三角形;

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$$



$$\therefore \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \therefore BE \perp AF$$

又  $\because AC \perp BE, AC \subset \text{平面 AFC}, AF \subset \text{平面 AFC}, \therefore BE \perp \text{平面 AFC}$

(2) 取 BE 中点为 O, 连接 FO, BO;

$$\therefore FO \perp AE, BO \perp AE,$$

$$\text{设 } AB=2, FO=BO=\sqrt{3}, BF=\sqrt{6},$$

$\therefore FO \perp BO$ , 以 O 为坐标原点, 建立如图所示坐标系;

$$\text{则 } A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), E(-1,0,0), F(0,0,\sqrt{3}),$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{FG} = \lambda \overrightarrow{AB} (\lambda > 0), \text{ 作 } FG \parallel AB, \text{ 可得: } G(-\lambda, \sqrt{3}\lambda, \sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{EB} = (1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{FB} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}), \overrightarrow{BG} = (-\lambda, \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

设  $\vec{n} = (x, y, z)$ , 是面 BEF 的一个法向量,

$$\text{则 } \overrightarrow{EB} \cdot \vec{n} = x + \sqrt{3}y = 0, \overrightarrow{FB} \cdot \vec{n} = \sqrt{3}y - \sqrt{3}z = 0 \text{ 令 } z = y = 1, \text{ 得 } x = -\sqrt{3}, \vec{n} = (-\sqrt{3}, 1, 1)$$

$$\text{设直线 BG 与平面 BEF 所成角 } \theta, \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{BG} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BG}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{15}}{10}, \text{ 即 } \frac{|\sqrt{3}\lambda + \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3} + \sqrt{3}|}{\sqrt{5} \times \sqrt{\lambda^2 + 3(\lambda-1)^2 + 3}} = \frac{\sqrt{15}}{10}, \text{ 解得: } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 或}$$

$$\lambda = -1, \lambda > 0 \text{ 故: } \lambda = \frac{1}{2}.$$

22. 解: (1) 由题意,  $r^2 = 8$ , 切线方程为  $-2x + 2y = 8$ , 令  $y = 0$ ,  $x = -4$ , 所以点 B 的坐标  $(-4, 0)$

(2) 方法一: 设  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ , 直线 MN 的方程为  $x = my - 4$ .

将直线 MN 的方程与  $x^2 + y^2 = 8$  联立, 可得

$$(m^2 + 1)y^2 - 8my + 8 = 0.$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = \frac{8m}{m^2 + 1}, y_1 y_2 = \frac{8}{m^2 + 1}.$$

$$\text{设 } P(-4, y_P), Q(-4, y_Q), k_{AM} = \frac{y_1 - 2}{x_1 + 2}, k_{AN} = \frac{y_2 - 2}{x_2 + 2}.$$

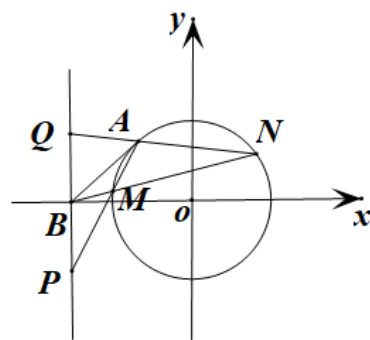
$$\text{则 AM: } y - 2 = \frac{y_1 - 2}{x_1 + 2}(x + 2), \text{ 则 } y_P = \frac{-2(y_1 - 2)}{x_1 + 2} + 2 = \frac{(-2 + 2m)y_1}{x_1 + 2}. \text{ 同理}$$

$$y_Q = \frac{-2(y_2 - 2)}{x_2 + 2} + 2 = \frac{(-2 + 2m)y_2}{x_2 + 2}.$$

$$\frac{|PB|}{|QB|} = \frac{|y_P|}{|y_Q|} = \frac{|(2m-2)y_1(x_2+2)|}{|(2m-2)y_2(x_1+2)|} = \frac{|my_1y_2 - 2y_1|}{|my_1y_2 - 2y_2|} = \frac{\frac{8m}{m^2+1} - 2(\frac{8m}{m^2+1} - y_2)}{\frac{8m}{m^2+1} - 2y_2} = 1$$

又

$$\text{或者 (由 } y_1 + y_2 = \frac{8m}{m^2 + 1}, y_1 y_2 = \frac{8}{m^2 + 1} \text{ 可得 } y_1 + y_2 = my_1 y_2.$$



$$\text{从而 } \frac{|PB|}{|BQ|} = \left| \frac{y_P}{y_Q} \right| = \left| \frac{(2x_1 - 2y_1 + 8)(x_2 + 2)}{(2x_2 - 2y_2 + 8)(x_1 + 2)} \right| = \left| \frac{(2m-2)y_1(my_2-2)}{(2m-2)y_2(my_1-2)} \right| = \left| \frac{my_1y_2-2y_1}{my_1y_2-2y_2} \right| = \left| \frac{y_2-y_1}{y_1-y_2} \right| = 1. \text{ ) 所以 } \frac{|PB|}{|BQ|} = 1.$$