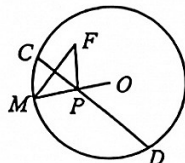


2022 年 1 月考试高 2023 届·数学试题解析

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	D	C	B	D	A	C	AC	AD	BC	ACD

6. 【解析】由题折痕 CD 是 MF 的垂直平分线, 所以 $PM = PF$, 所以 $PO + PF = PO + PM = OM$, OM 为圆的半径, 且 OF 小于圆的半径, 所以点 P 的轨迹是椭圆.



7. 【解析】设 $|PF_1| = r_1$, $|PF_2| = r_2$ 在椭圆 C_1 中 $(2C)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos 60^\circ$

$$= (r_1 + r_2)^2 - 3r_1r_2 = (2a_1)^2 - 3r_1r_2, \therefore 3r_1r_2 = 4a_1^2 - 4c^2 = 4b_1^2, \text{ 即 } r_1r_2 = \frac{4}{3}b_1^2, \text{ 在双曲线 } C_2$$

$$\text{中 } (2C)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos 60^\circ = (r_1 - r_2)^2 + r_1r_2 = (2a_2)^2 + r_1r_2, \therefore r_1r_2 = 4c^2 - 4a_2^2 = 4b_2^2, \therefore \frac{4}{3}b_1^2 = 4b_2^2$$

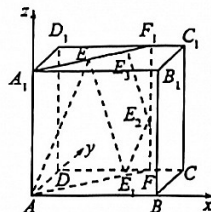
即 $b_1^2 = 3b_2^2$, 则 $a_1^2 - c^2 = 3(c^2 - a_2^2)$, 所以 $a_1^2 + 3a_2^2 = 4c^2$, 由题知 $\frac{1}{e_1^2} + 3e_1^2 = 4$, 则椭圆离心率 $e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 选 A.

8. 【解析】由对称性知质点经点 E 反射到平面 $ABCD$ 的点 $E_1(8, 6, 0)$ 处. 在坐标平面 xOy 中,

直线 AE_1 的方程为 $y = \frac{3}{4}x$, 与直线 DC 的方程 $y = 7$ 联立得 $F(\frac{28}{3}, 7)$. 由两点间的距离公式得 E_1F

$$= \frac{5}{3}. \because \tan \angle E_2E_1F = \tan \angle EAE_1 = \frac{12}{5}, \therefore E_2F = E_1F \cdot \tan \angle E_2E_1F = 4. \therefore E_2F_1 = 12 - 4 = 8.$$

$$\therefore \frac{L_3}{L_4} = \frac{E_1E_2}{E_2E_3} = \frac{E_2F}{E_2F_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ 故选 C.}$$

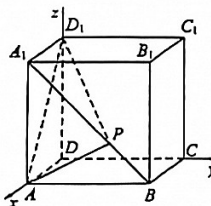


11. 【解析】对于 A, 以 D 为原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, DD_1 为 z 轴, 建立空间直角坐标

系, $D_1(0, 0, 1), A(1, 0, 0), C(0, 1, 0)$, 设 $P(1, a, b)(0 < a < 1, 0 < b < 1)$,

$$\overrightarrow{D_1P} = (1, a, b-1), \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0) \cos \langle \overrightarrow{D_1P}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\overrightarrow{D_1P} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{D_1P}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{a-1}{\sqrt{1+a^2+(b-1)^2} \times \sqrt{2}} < 0$$

$\therefore 0 < a < 1, 0 < b < 1, \therefore \frac{\pi}{2} < \langle \overrightarrow{D_1P}, \overrightarrow{AC} \rangle < \frac{3\pi}{4}$, \therefore 直线 D_1P 与 AC 所成的角为 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 故 A 错误; 对于 B, 正方体



$ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1D_1 \perp AA_1$, $A_1D_1 \perp AB$, $\therefore AA_1 \cap AB = A$, $\therefore A_1D_1 \perp$ 平面 A_1AP , $\therefore A_1D_1 \perp$ 平面 D_1A_1P ,

\therefore 平面 $D_1A_1P \perp$ 平面 A_1AP , 故 B 正确; 对于 C, $\because S_{\square CDD_1} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$, P 到平面 CDD_1 的距离 $BC = 1$,

\therefore 三棱锥 $D_1 - CDP$ 的体积: $V_{D_1-CDP} = V_{P-CDD_1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$ 为定值, 故 C 正确;

对于 D, 平面 APD_1 截正方体所得的截面不可能是直角三角形, 故 D 错误;

12. 【解析】数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 2a_n - 2$, 当 $n = 1$ 时, 解得 $a_1 = 2$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}$, 整理得 $a_n = 2a_{n-1}$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ (常数), 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等

比数列. 所以 $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ (首项符合通项). 所以 $a_n = 2^n$, 故选项 A 正确.

由于 $a_n = 2^n$, 故存在两项 a_m, a_n , 使得 $a_m a_n = 64$, $2^{m+n} = 2^6$, 即 $m+n=6$. 故选项 C 正确.

所以 $b_n = \log_2 a_n = n$, 所以 $T_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, 所以 $\frac{T_n}{n} = \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ 符合一次函数的形式,

故该数列为等差数列. 故选项 D 正确.

二、填空题 13. $\vec{AB} - \vec{AD} - \vec{AA}_1$; 14. 1.44; 15. $4\sqrt{2}+4$; 16. 18

15. 【解析】如图, 由双曲线第一定义得 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ ①,

又由三角形三边关系可得 $|PA| + |PF_2| \geq |AF_2|$ ② (当点 P 为 AF_2 与双曲线的交点时取到等号),

①+②得: $|PF_1| + |PA| \geq 2a + |AF_2|$, 故 $(|PF_1| + |PA|)_{\min} = 2a + |AF_2|$, 由双曲线为等轴双曲线, 且焦距为 8 可得,

$a^2 = b^2 = 8$, 则 $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $a = 2\sqrt{2}, c = 4$, $F_2(4, 0)$, $|AF_2| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$,

则 $(|PF_1| + |PA|)_{\min} = 2a + |AF_2| = 4\sqrt{2} + 4$

16. 【解析】由 $S_2 + a_2 = S_3 - 3$ 得 $a_2 = S_3 - S_2 - 3 = a_3 - 3$, 所以 $a_1 q = a_1 q^2 - 3, a_1 = \frac{3}{q^2 - q} > 0 \Rightarrow q > 1$.

所以 $a_4 + 3a_2 = a_1 q^3 + 3a_1 q = \frac{3(q^3 + 3q)}{q^2 - q} = \frac{3(q^2 + 3)}{q - 1} = 3 \times \frac{(q-1)^2 + 2(q-1) + 4}{q-1}$

$= 3 \left[(q-1) + \frac{4}{q-1} \right] + 6 \geq 3 \times 2 \sqrt{(q-1) \cdot \frac{4}{q-1}} + 6 = 18$. 当且仅当 $q-1 = \frac{4}{q-1} \Rightarrow q = 3 > 1$ 时取得最小值.

17. 【解析】(1) $a_n = 3^{n-1}$. (2) 由 (1) 知 $\log_3 a_n = n-1$. 故 $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$. 由 $S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$

得 $m(m-1) + (m+1)m = (m+3)(m+2)$, 即 $m^2 - 5m - 6 = 0$. 解得 $m = -1$ (舍去), $m = 6$.

18. 【解析】(1) 取 AP 中点 F , 连接 EF, DF . $\because E$ 为 PB 中点, $\therefore EF \parallel \frac{1}{2}AB$,

又 $CD \parallel \frac{1}{2}AB$, $\therefore CD \parallel EF$, $\therefore CDFE$ 为平行四边形, $\therefore DF \parallel CE$. 又 $\triangle PAD$ 为正三角形, $\therefore PA \perp DF$,

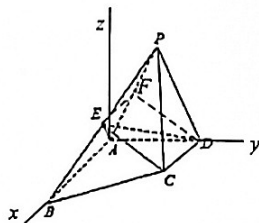
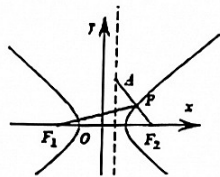
从而 $PA \perp CE$, 又 $PA \perp CD$, $CD \cap CE = C$, $\therefore PA \perp$ 平面 CDE , 又 $PA \subset$ 平面 PAB , \therefore 平面 $PAB \perp$ 平面 CDE .

(2) $AB \parallel CD, PA \perp CD \Rightarrow PA \perp AB$, 又 $AB \perp AD, PA \cap AD = A$, $\therefore AB \perp$ 平面 PAD .

$\therefore CD \perp$ 平面 $PAD \Rightarrow \angle CPD$ 为 PC 与平面 PAD 所成的角, 即 $\angle CPD = 45^\circ$, $\therefore CD = AD$.

以 A 为原点, 建系如图, 设 $AD = 4$, 则 $B(8, 0, 0), P(0, 2, 2\sqrt{3}), D(0, 4, 0), E(4, 1, \sqrt{3})$,

$\therefore \vec{AE} = (4, 1, \sqrt{3}), \vec{AD} = (0, 4, 0)$. 设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 ADE 的法向量, 则



$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AE} = 4x + y + \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AD} = 4y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z = -4, \text{ 得 } \vec{n} = (\sqrt{3}, 0, -4), \text{ 由 (1) 知, } \vec{AP} = 2(0, 1, \sqrt{3}) \text{ 为平面 } CDE \text{ 的一个法向}$$

$$\text{量. } \therefore \cos \langle \vec{AP}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{|\vec{AP}| |\vec{n}|} = -\frac{2\sqrt{57}}{19}, \text{ 即二面角 } A-DE-C \text{ 的余弦值为 } -\frac{2\sqrt{57}}{19}.$$

19. 【解析】(1) 已知点 P 在圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 上运动, A 点坐标为 $(-2, 0)$

$$\text{设 } AP \text{ 的中点为 } Q(x, y), P(x_0, y_0), \text{ 由中点坐标公式可知, } \begin{cases} x = \frac{x_0 - 2}{2} \\ y = \frac{y_0}{2} \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} x_0 = 2x + 2 \\ y_0 = 2y \end{cases}$$

代入圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 中, 故线段 AP 中点的轨迹方程为 $x^2 + y^2 - y = 0$

(2) 圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 化为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, 圆心 $C(2, 1)$, 半径为 1,

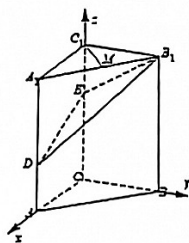
圆心到直线 l 的距离为 $\frac{|2-2-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$, 则圆上一动点 P 到直线 l 的距离的最小值是 $\sqrt{5}-1$, 最大值是 $\sqrt{5}+1$, 又

$$MN = \frac{5\sqrt{5}}{2}, \text{ 所以面积 } S \in \left[\frac{25}{4} - \frac{5\sqrt{5}}{4}, \frac{25}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{4} \right]$$

20. 【解析】(1) 证明: 依题意, 以 C 为原点, 分别以 CA, CB, CC_1 的方向为 x 轴、 y 轴、

z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 如图所示, 可得 $C(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(0, 2, 0),$

$C_1(0, 0, 3), A_1(2, 0, 3), B_1(0, 2, 3), D(2, 0, 1), E(0, 0, 2), M(1, 1, 3).$



依题意, $\vec{C_1M} = (1, 1, 0), \vec{B_1D} = (2, -2, -2)$, 所以 $\vec{C_1M} \cdot \vec{B_1D} = 2 - 2 + 0 = 0$, 所以 $C_1M \perp B_1D$.

(2) 因为 $CA \perp BC, CA \perp CC_1$, 所以 $CA \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $\vec{CA} = (2, 0, 0)$ 是平面 BB_1E 的一个法向量,

又 $\vec{EB_1} = (0, 2, 1), \vec{ED} = (2, 0, -1)$. 设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 DB_1E 的法向量, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EB_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{ED} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

不妨设 $x = 1$, 可得 $\vec{n} = (1, -1, 2)$, $\cos \langle \vec{CA}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{n}}{|\vec{CA}| |\vec{n}|} = \frac{2}{2 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\therefore \sin \langle \vec{CA}, \vec{n} \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \vec{CA}, \vec{n} \rangle} = \frac{\sqrt{30}}{6}$,

\therefore 二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

(3) 依题意, $\vec{AB} = (-2, 2, 0)$, 由 (2) 知 $\vec{n} = (1, -1, 2)$ 为平面 DB_1E 的一个法向量, 设 AB 与平面 DB_1E 所成角

为 θ , 所以 $\sin \theta = \cos \langle \vec{AB}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AB}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, \therefore 直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21. 【解析】(1) 把点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 代入函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 得 $a = \frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 $S_n = f(n) - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -\frac{3}{2}$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 所以 $a_n = \begin{cases} -\frac{3}{2}, n=1 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 2 \end{cases}$;

(2) 由 $a = \frac{1}{2}$, $b_n = \log_a(-a_{n+1})$ 得 $b_n = n+1$, 所以 $T_n = -\frac{3}{2} \times 2 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \dots - (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, ①

$\frac{1}{2}T_n = -\frac{3}{2} - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \dots - (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. ② 由 ① - ② 得: $\frac{1}{2}T_n = -\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

所以 $T_n = -5 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = (n+3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 5$. ($n=1$ 时也满足) $\therefore T_{n+1} - T_n = -(n+2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 0$

$\therefore T_n = (n+3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 5$ 在 $n \in N^*$ 为单调递减数列, 故当 $n=1$ 时 T_n 有最大值为 $T_1 = -3$.

22. 【解析】(1) 如图, $\because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore a = \sqrt{2}c$, $b = c$, 直线 EF 的方程为 $x - y + c = 0$,

\because 直线 EF 与圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 相切, $\therefore \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore c = 1, a = \sqrt{2}, b = 1$, \therefore 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x_0, 0)$, 设直线 $l: y = k(x+1)$, 联立 $\begin{cases} y = k(x+1) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$,

消去 y 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$, $\therefore x_1 + x_2 = \frac{-4k^2}{2k^2 + 1}$, $x_1x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}$,

$\therefore |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{-4k^2}{2k^2+1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2k^2-2}{2k^2+1}} = \frac{2\sqrt{2}(k^2+1)}{2k^2+1}$,

线段 AB 的中点为 $\left(-\frac{2k^2}{2k^2+1}, \frac{k}{2k^2+1}\right)$, \therefore 线段 AB 的垂直平分线为 $-k\left(y - \frac{k}{2k^2+1}\right) = x + \frac{2k^2}{2k^2+1}$,

令 $y=0$, 得 $x_0 = -\frac{k^2}{2k^2+1}$, $\therefore |PF| = |x_0 + 1| = \left|1 - \frac{k^2}{2k^2+1}\right| = \frac{k^2+1}{2k^2+1}$,

$\frac{|PF|}{|AB|} = \frac{\frac{k^2+1}{2k^2+1}}{\frac{2\sqrt{2}(k^2+1)}{2k^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 故 $\frac{|PF|}{|AB|}$ 为定值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

重庆外国语学校 2021—2022 学年(上)1 月考试

高 2023 届·数学试题

(满分 150 分, 120 分钟完成)

一、单项选择题(本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个符合题目要求)

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_9 = 10$, 则 $a_5 =$ ()

- A. 5 B. 6 C. 8 D. 9

2. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 则双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm 2x$ B. $y = \pm \sqrt{2}x$ C. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ D. $y = \pm \frac{1}{2}x$

3. 已知 $a = (-2, 1, 3)$, $b = (-1, 2, 1)$, 若 $a \perp (a - \lambda b)$, 则实数 λ 的值为 ()

- A. -2 B. $-\frac{14}{3}$ C. $\frac{14}{5}$ D. 2

4. 若过点 $A(3, 0)$ 的直线 l 与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 有公共点, 则直线 l 斜率的取值范围为 ()

- A. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ B. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ C. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

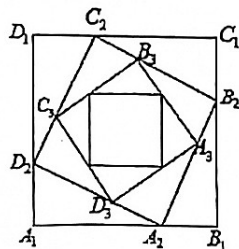
5. 如图, 在面积为 1 的正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内作四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 使 $\overline{A_1A_2} = 2\overline{A_2B_1}$, $\overline{B_1B_2} = 2\overline{B_2C_1}$,

$\overline{C_1C_2} = 2\overline{C_2D_1}$, $\overline{D_1D_2} = 2\overline{D_2A_1}$, 以此类推, 在四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 内

再作四边形 $A_3B_3C_3D_3 \dots$, 记四边形 $A_iB_iC_iD_i$ 的面积为

$a_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n =$ ()

- A. $\frac{9}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right]$ B. $\frac{9}{4} \left[1 - \left(\frac{5}{9} \right)^n \right]$ C. $\frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]$ D. $3 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right]$



6. 圆形纸片的圆心为 O , 点 F 是圆内不同于 O 的一定点, 点 M 是圆周上一动点, 把纸片折叠使点 M 与点 F 重合, 然后抹平纸片, 折痕为 CD , 若 CD 与 OM 交于点 P , 则点 P 的轨迹是 ()

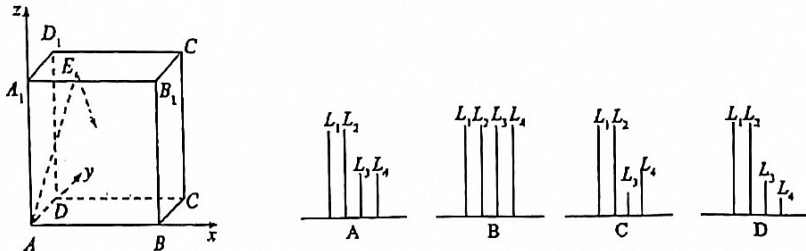
- A. 圆 B. 双曲线 C. 抛物线 D. 椭圆

7. 我们把焦点相同, 且离心率互为倒数的椭圆和双曲线称为一对“相关曲线”. 已知 F_1, F_2 是一对相关曲线的焦点, P 是椭圆和双曲线在第一象限的交点, 当 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ 时, 这一对相关曲线中椭圆

的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

8. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=11$, $AD=7$, $AA_1=12$. 一质点从顶点 A 射向点 $E(4, 3, 12)$, 遇长方体的面反射(反射服从光的反射原理), 将第 $i-1$ 次到第 i 次反射点之间的线段记为 $L_i (i=2, 3, 4)$, $L_1=AE$, 将线段 L_1, L_2, L_3, L_4 竖直放置在同一水平线上, 则大致的图形是 ()



二、多项选择题(本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每小题给出的四个选项中, 有多个符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分)

9. 等腰直角三角形 ABC 的直角顶点为 $C(3, 3)$, 点 A 的坐标为 $(0, 4)$, 则点 B 的坐标可以是 ()

- A. $(2, 0)$ B. $(6, 4)$ C. $(4, 6)$ D. $(0, 2)$

10. 关于双曲线 $C_1: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 与双曲线 $C_2: \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$, 下列说法正确的是 ()

- A. 它们有相同的渐近线 B. 它们有相同的顶点 C. 它们的离心率相等 D. 它们的焦距相等

11. 如图, 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为线段 A_1B 上的动点(不含端点),

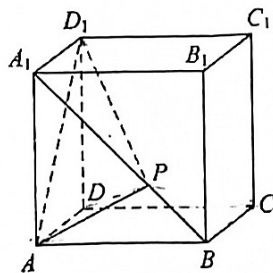
则下列结论正确的是 ()

- A. 直线 D_1P 与 AC 所成的角可能是 $\frac{\pi}{6}$

- B. 平面 $D_1A_1P \perp$ 平面 A_1AP

- C. 三棱锥 D_1-CDP 的体积为定值

- D. 平面 APD_1 截正方体所得的截面可能是直角三角形



12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 2a_n - 2$, 若存在两项 a_m, a_n , 使得 $a_m a_n = 64$,

则下列结论正确的是 ()

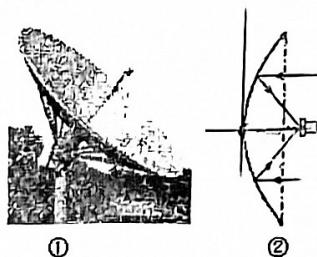
- A. 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列 B. 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列

- C. $m+n$ 为定值 D. $b = \log_2 a_n$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则数列 $\left\{\frac{T_n}{n}\right\}$ 为等差数列

三、填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 用向量 \vec{AB} , \vec{AD} , $\vec{AA_1}$ 表示 $\vec{D_1B}$ = _____.

14. 某学习小组研究一种卫星接收天线 (如图①所示),
发现其曲面与轴截面的交线为抛物线, 在轴截面内的
卫星波束呈近似平行状态射入形为抛物线的接收天线,
经反射聚焦到焦点处 (如图②所示), 已知接收天线的
口径 (直径) 为 $4.8m$, 深度为 $1m$, 则该抛物线的
焦点到顶点的距离为 _____ m .



15. 已知等轴双曲线的焦距为 8, 左、右焦点 F_1 , F_2 在 x 轴上, 中心在原点, 点 A 的坐标为
 $(2, 2\sqrt{3})$, P 为双曲线右支上一动点, 则 $|PF_1| + |PA|$ 的最小值为 _____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_2 + a_2 = S_3 - 3$,
则 $a_4 + 3a_2$ 的最小值为 _____.

四、解答题: (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 4$, $a_3 - a_1 = 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

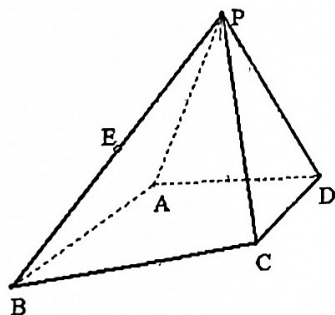
(2) 记 S_n 为数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$, 求 m .

18. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAD$ 为正三角形, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, $\angle BAD = 90^\circ$, $PA \perp CD$,
 E 为棱 PB 的中点.

(1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 CDE ;

(2) 若直线 PC 与平面 PAD 所成角为 45° , 求二面角 $A-DE-C$ 的余弦值.



19. (本小题满分 12 分)

已知点 P 在圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 上运动, A 点坐标为 $(-2, 0)$.

(1) 求线段 AP 中点的轨迹方程;

(2) 若直线 $l: x - 2y - 5 = 0$ 与坐标轴交于 MN 两点, 求 $\triangle PMN$ 面积的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

如图所示, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC , $AC \perp BC$, $AC = BC = 2$, $CC_1 = 3$,

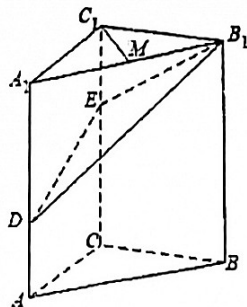
点 D , E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上, 且 $AD = 1$,

$CE = 2$, 点 M 为棱 A_1B_1 的中点.

(1) 求证: $C_1M \perp B_1D$;

(2) 求二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值;

(3) 求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知点 $(1, \frac{1}{2})$ 是函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象上一点, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 $S_n = f(n) - 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \log_a(-a_{n+1})$, 且数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n 的通项公式及最大值.

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的上顶点为 E , 左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 EF 与

圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设过点 F 且斜率存在的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点,

线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 P , 试判断 $\frac{|PF|}{|AB|}$ 是否为定值?

并说明理由.

