重庆外国语学校

2022-2023 学年度（上）高 2023 届 4 次周考

数学试题

（满分 150 分， 120 分钟完成）

命题人	陶丹
审题人	邓勇

一、单选题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．请将正确答案的代号填涂在答题卡上．

1．已知集合 $A=\left\{x\left|x^2-x-6\le 0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|y=\sqrt{x-1}\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．[1，2]　　　B．[1，3]　　　C．[0，2]　　　D．[0，3]

2．函数 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，在公共定义域内，下列结论一定正确的是（　　）

A．$f(x)+g(x)$ 为奇函数　　　B．$f(x)+g(x)$ 为偶函数

C．$f(x)g(x)$ 为奇函数　　　D．$f(x)g(x)$ 为偶函数

3．为了得到函数 $y=\sin 2x$ 的图像，只需把函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图像（

A．向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位　　　B．向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位

C．向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位　　　D．向右移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位

4．六名志愿者到北京、延庆、张家口三个赛区参加活动，若每个赛区两名志愿者，则安排方式共有（　　）

A．15 种　　　B．90 种　　　C．540 种　　　D．720 种

5．传说古希腊毕达哥拉斯派的数学家经常在沙滩上面画点或用小石子表示数.他们将 $1,3,6,10,15,\cdots,\dfrac{n(n+1)}{2},\cdots$ 称为三角形数；将 $1,4,9,16,25,\cdots,n^2,\cdots$，称为正方形数.现从小于 100 的三角形数中，随机抽取一个数，则这个数是正方形数的概率为（　　）

A．$\dfrac{1}{5}$　　　B．$\dfrac{1}{10}$　　　C．$\dfrac{1}{13}$　　　D．$\dfrac{2}{13}$

6．设 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 4$，$c=\log_4 8$，则（　　）

A．$b<c<a$　　　B．$c<b<a$　　　C．$a<c<b$　　　D．$a<b<c$

7．已知圆柱的侧面积为 2π，其外接球的表面积为 S，则 S 的最小值为（　　）

A．3π　　　B．4π　　　C．6π　　　D．9π

8.已知 $a>0$，$b>0$ 且 $ab=1$，不等式 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{m}{a+b}\ge 4$ 恒成立，则正实数 m 的取值范围是（　　）

A．$m\ge 2$　　　B．$m\ge 4$　　　C．$m\ge 6$　　　D．$m\ge 8$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知复数 $z=a+bi$（$a,b\in R$ 且 $b\neq 0$），$\bar{z}$ 是 z 的共扼复数，则下列命题中的真命题是（　　）

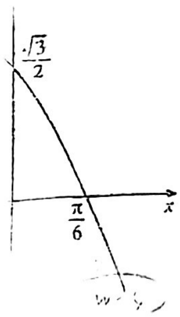
A. $z+\bar{z}\in R$　　B. $z-\bar{z}\in R$　　C. $z\cdot\bar{z}\in R$　　D. $\frac{\bar{z}}{z}\in R$

10. 已知 $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(1,-1)$，$\vec{c}=(m-2,-n)$，其中 m，n 均为正数，且 $(\vec{a}-\vec{b})//\vec{c}$，下列说法正确的是（　　）

A. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角　　B. $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}$

C. $2m+n=4$　　D. mn 的最大值为 2

11.已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$0<\omega<10$，$0<\varphi<\pi$）的部分图象如图所示，则下列结论正确的是（　　）



A. $\omega=2$　　B. $\omega=3$

C. $f(x)$ 在 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$ 上单调递增　　D. $f(x)$ 图像关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称

12. 排查新型冠状病毒肺炎患者需要进行核酸检测．现有两种检测方式：（1）逐份检测；（2）混合检测：将其中 k 份核酸分别取样混合在一起检测，若检测结果为阴性，则这 k 份核酸全为阴性，因而这 k 份核酸只要检测一次就够了，如果检测结果为阳性，为了明确这 k 份核酸样本究竟哪几份为阳性，就需要对这 k 份核酸再逐份检测，此时，这 k 份核酸的检测次数总共为 $k+1$ 次．假设在接受检测的核酸样本中，每份样本的检测结果是阴性还是阳性都是独立的，并且每份样本是阳性的概率都为 $p(0<p<1)$，若 $k=10$，运用概率统计的知识判断下列哪些 p 值能使得混合检测方式优于逐份检测方式．（参考数据：$\lg 0.794\approx -0.1$）（　　）

A. 0.4　　B. 0.3　　C. 0.2　　D. 0.1

第II卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2，若 a_3，a_5，a_8 成等比数列，则 $a_1=$______.

14. ΔABC 中，D 为 BC 的中点，$BC=4$，$AD=3$，则 $AB\cdot AC=$______.

15. 已知圆锥的母线长为 2，其侧面展开图是一个半圆，则该圆锥的体积为______.

16.已知函数 $f(x)=x^3-ax(a>0)$，b，c 分别是 $f(x)$ 的极大值点与极小值点，若 $d>b$ 且 $f(d)=f(b)$，则 $\frac{d}{c}=$______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，其中 17 题 10 分，18、19、20、21、22 题各 12 分，把解答过程写在答题卡相应位置上.

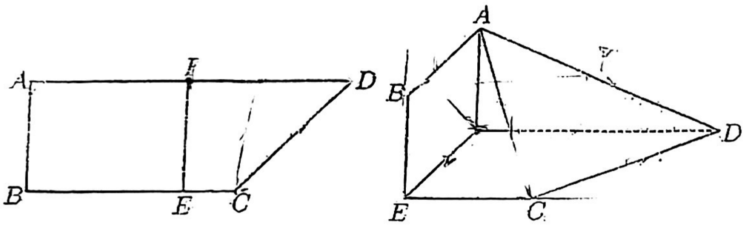
17．记ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\sin A+(b-a)\sin B=c\sin C$．

（1）求角C；　　（2）求$\dfrac{a+b}{c}$的取值范围．

18．已知S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，$2S_n=(n+1)a_n$，且$a_1=1$．

（1）证明：$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$为常数列；　　（2）若$b_n=\dfrac{a_n\cdot 2^n}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

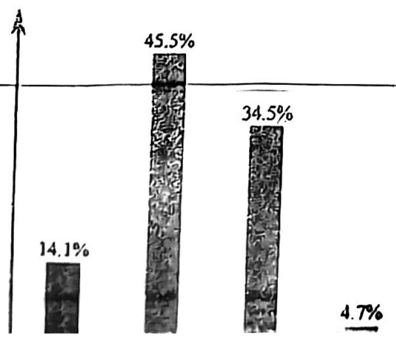
19．如图，四边形$ABCD$中，$AB\perp AD, AD//BC, AD=6, BC=2AB=4$，$E$，$F$分别在$BC$，$AD$上，$EF//AB$，现将四边形$ABCD$沿$EF$折起，使$BE\perp EC$

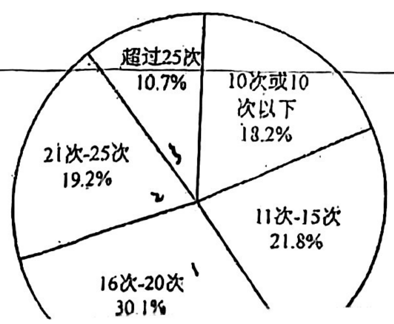


（1）若$BE=3$，在折叠后的线段AD上是否存在一点P，使得$CP//$平面$ABEF$？若存在，求出$\dfrac{AP}{PD}$的值；若不存在，说明理由．

（2）求三棱锥$A-CDF$的体积的最大值，并求出此时点F到平面ACD的距离．

20．伴随经济的飞速发展，中国全民健身赛事活动日益丰富，公共服务体系日趋完善.据相关统计数据显示，中国经常参与体育锻炼的人数比例为37.2%，城乡居民达到《国民体质测定标准》合格以上的人数比例达到90%以上.健身之于个人是一种自然而然的习惯，之于国家与民族，则是全民健康的基础柱石之一，某市一健身连锁机构对去年的参与了该连锁机构健身的会员进行了统计，制作成如下两个统计图，图1为该健身连锁机构会员年龄等级分布图，图2为一个月内会员到健身连锁机构频数分布扇形图.





房锻炼16次及以上的会员称为“健身达人”，15次及以下的会员称为“健身爱好者”，且已知在“健身达人”中有$\frac{5}{6}$是“年轻人”.

（1）现从该健身连锁机构会员中随机抽取一个容量为100人的样本，根据上图的数据，补全下方2×2列联表，并判断依据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，能否认为是否为“健身达人”与年龄有关；

类别	年轻人	非年轻人	合计
健身达人			
健身爱好者			
合计			100

临界值表：

$P(K^2<k_0)$	0.40	0.25	0.05	0.005
k_0	0.708	1.323	3.841	7.879

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

（2）将（1）中的频率作为概率，连锁机构随机选取会员进行回访，抽取3人回访.

①若选到的3人中2人为“年轻人”1人为“非年轻人”，再从这3人中随机选取的1人，了解到该会员是“健身达人”，求该人为非年轻人的概率；

②设3人中既是“年轻人”又是“健身达人”的人数为随机变量X，求X的分布列和期望值

21．已知圆$O:x^2+y^2=4$，点M是圆O上任意一点，M在x轴上的射影为N，点P满足$\overrightarrow{NP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{NM}$，记点$P$的轨迹为$E$.

（1）求曲线E的方程；

（2）已知$F(1,0)$，过F的直线m与曲线E交于A,B两点，过F且与m垂直的直线n与圆O交于C,D两点，求$|AB|+|CD|$的取值范围.

22．已知函数$f(x)=\ln x+\frac{a}{2}x^2(a\in\mathbf{R})$.

（1）当$a=1$时，对于函数$G(x)=f(x)-3\ln x$，存在x_1，$x_2\in[1,4]$，使得$G(x_1)-G(x_2)\geq m$成立，求满足条件的最大整数m；$(\ln 2\approx 0.693)$

（2）使不等式$f(x)-3x\geq\frac{a}{2}x^2+(k-2)x-x\ln x-1-b$对任意$x\in[1,\mathrm{e}]$恒成立时最大的$k$记为$c$，求当$b\in[1,2]$时，$b+c$的取值范围.