

重庆外国语学校

2021—2022 学年(上) 12 月考试

高 2023 届·数学试题

(满分 150 分, 120 分钟完成)

一、单项选择题(本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个符合题目要求)

1. 已知 $M(-2, 0), N(2, 0), |PN| - |PM| = 3$, 则动点 P 的轨迹是()

- A. 双曲线 B. 双曲线左边一支 C. 一条射线 D. 双曲线右边一支

2. 抛物线 $y = 4x^2$ 的焦点坐标为()

- A. $(1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(0, \frac{1}{16})$ D. $(\frac{1}{16}, 0)$

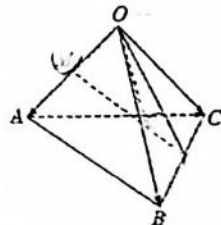
3. 圆锥曲线 $\frac{x^2}{m+8} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 则 m 的值为()

- A. $-\frac{5}{4}$ B. 4 C. $-\frac{5}{4}$ 或 4 D. -2 或 4

4. 如图, 在四面体 $OABC$ 中, M, N 分别是 OA, BC 的中点, G 为 MN 上一点, 且 $\overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$, 若 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$,

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 则 $\overrightarrow{OG} =$ ()

- A. $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ B. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$
C. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ D. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$



5. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 3$, 从点 $A(-2, 0)$ 观察点 $B(2, a)$, 要使视线不被圆 C 挡住, 则 a 的取值范围是()

- A. $\left(-\infty, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
C. $(-\infty, 2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(-\infty, -4\sqrt{3}) \cup (4\sqrt{3}, +\infty)$

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 实轴长为 5, 点 M 在 C 的左支上, 过点 M

作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 N , 则当 $|MF_2| + |MN|$ 取最小值 10 时, 该双曲线的渐近线方程为()

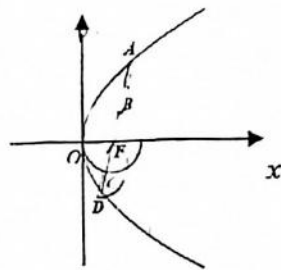
- A. $y = \pm \frac{1}{4}x$ B. $y = \pm \frac{1}{2}x$ C. $y = \pm 2x$ D. $y = \pm 4x$

7. 已知点 P, Q, M 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的三点, 坐标原点 O 是 $\triangle PQM$ 的重心, 若点

$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$, 直线 PQ 的斜率恒为 $-\frac{1}{2}$, 则椭圆 C 的离心率为()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

8. 如图, 抛物线 $C_1: y^2 = 4x$, 圆 $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$, 过 C_1 焦点 F 的直线
从上至下依次交 C_1, C_2 于点 A, B, C, D . 若 $|FD| = |AB|$, O 为坐标原点, 则



$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{DA} = (\quad)$

- A. -2 B. 1 C. 4 D. $2\sqrt{3}$

二、多项选择题 (本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每小题给出的四个选项中, 有多个符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知关于 x, y 的方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ (其中 m, n 为参数) 表示曲线 C , 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $m = n > 0$, 则表示圆 B. 若 $mn > 0$, 则表示椭圆
C. 若 $mn < 0$, 则表示双曲线 D. 若 $mn = 0, m + n > 0$, 则表示两条直线

10. 已知 $A(0, 4), B(2, 0)$, 直线 AB 上有一动点 $P(x, y)$, 则 ()

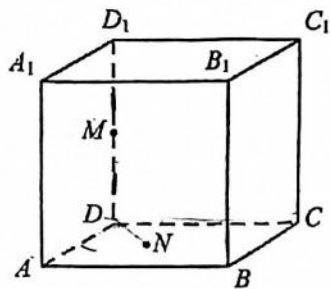
- A. 直线 AB 的斜率为 -2 B. 直线 AB 的截距式方程为 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$
C. 点 $O(0, 0)$ 关于直线 AB 对称的点的坐标为 $(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$ D. xy 的最大值为 2

11. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点, 过 F_2 作 x 轴的垂线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_1$ 为正三角形, 则下列结论正确的是 ()

- A. $b = 2$ B. C 的焦距是 $2\sqrt{5}$
C. C 的离心率为 $\sqrt{3}$ D. $\triangle ABF_1$ 的面积为 $4\sqrt{3}$

12. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M 为 DD_1 的中点, N 为正方形 $ABCD$ 所在平面内一动点. 则下列命题正确的有 ()

- A. 若 $MN = 2$, 则 MN 的中点的轨迹所围成图形的面积为 π
B. 若 N 到直线 BB_1 与直线 DC 的距离相等, 则 N 的轨迹为抛物线
C. 若 D_1N 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 N 的轨迹为双曲线
D. 若 $\angle ND_1B = \frac{\pi}{6}$, 则 N 的轨迹为椭圆



五、填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 直线 $(3m+1)x + (4m+1)y - 12m - 1 = 0$ ($m \in R$) 所过定点坐标为_____

14. 已知 $\vec{a} = (2, -1, 3), \vec{b} = (-1, 4, 2), \vec{c} = (-3, 5, \lambda)$, 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三向量共面, 则实数 $\lambda =$ _____.

15. 已知抛物线 $y^2 = 8x$, O 为坐标原点, 过其焦点的直线交抛物线于 A, B 两点, 满足 $|AB| = 10$, 则 $\triangle OAB$ 的面积为_____.

16. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), F_1 为左焦点, A_1, A_2 为左、右顶点, P 是椭圆 C_1 上任意一点, PF_1 的最大值为 3, 直线 PA_1 和 PA_2 满足 $k_{PA_1} k_{PA_2} = -\frac{3}{4}$, 则椭圆 C_1 的方程为_____.

$C_2: x^2 + (y + 3\sqrt{3})^2 = 3$ 的两条切线 PM, PN , 切点分别为 M, N 则 $\overrightarrow{C_2M} \cdot \overrightarrow{C_2N}$ 的最小值为_____.

四、解答题: (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

已知直线 $l_1: 2ax - (3a+1)y + 1 = 0, l_2: x + ay - 1 = 0$

(1) 若 $l_1 \perp l_2$, 求实数 a 的值;

(2) 若 $l_1 \parallel l_2$, 求 l_1 与 l_2 之间的距离.

18. (本小题满分 12 分)

已知圆 C 的圆心坐标为 $C(3, 0)$, 且该圆经过点 $A(0, 4)$.

(1) 若点 B 也在圆 C 上, 且 $AB=8$, 求直线 AB 的方程;

(2) 过点 A 作直线 l , 若圆 C 上只有一个点到直线 l 的距离为 10, 点 P 为圆心在原点的单位圆上的一点, 求点 P 到直线 l 的距离的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

已知焦点在 y 轴上的抛物线过 $P(2, 2)$

(1) 求抛物线的标准方程及准线方程;

(2) 已知直线 $l: y = x + b$ ($b \neq 0$) 与抛物线交于点 A, B , 若以 AB 为直径的圆过原点 O , 求直线 l 的方程.

20. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线为 $y = x$, 且实轴端点与虚轴端点的距离为 $\sqrt{2}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

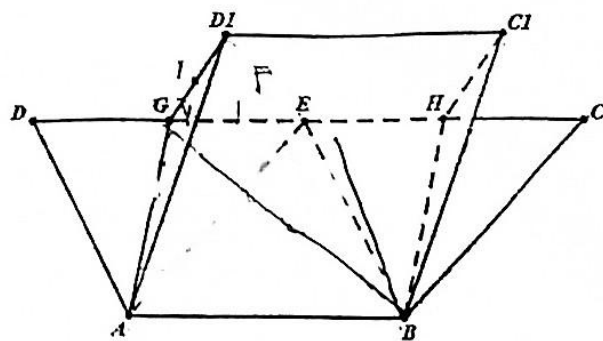
(2) 过点 $A(2, 1)$ 的直线与双曲线交于 P, Q 两点, 若 A 为 PQ 的中点, M 为双曲线左支上的一点, 求 $\triangle MPQ$ 面积最小值.

21. (本小题满分 12 分)

等腰梯形 $ABCD$ 中, $2AB = 2BC = CD = 4$, $\angle ABC = 120^\circ$, H, E, G 为 CD 的四等分点, 将 $\triangle DAG$, $\triangle CBH$ 分别沿 AG, BH 折起, 使得 $D_1C_1 = AB$.

(1) 当平面 $AGD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ 时, 求多面体 D_1AGC_1BH 体积;

(2) 当 $D_1B = \sqrt{6}$ 时, 过点 D_1 作 D_1M , 使 $\overrightarrow{D_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, 求直线 BM 与平面 BHC_1 所成角的正弦值.



22. (本小题满分 12 分)

已知圆 $A: (x + \sqrt{3})^2 + y^2 = 16$, $B(\sqrt{3}, 0)$, E 为圆上任意一点, 线段 BE 的中垂线与直线 AE 交于点 C .

(1) 求点 C 的轨迹方程;

(2) 若 C 的右顶点和上顶点分别为 M, N , 直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点 (点 P 在第一象限), 且直线 MP, NQ 的斜率之和为 0.

① 证明: 直线 l 的斜率 k 为定值;

② 求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

12 月月考参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	C	A	D	C	A	B	AC D	AC D	AC D	BCD

二、填空题

13、 $(-8,9)$ 14、 -1 15、 $4\sqrt{5}$ 16、 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, -\frac{21}{8}$

三、解答题

17. 解: (1) 由题 $2a - (3a + 1)a = 0$, 所以 $a = 0$ 或 $a = -\frac{1}{3}$,

(2) 由题 $\begin{cases} 2a^2 + 3a + 1 = 0 \\ 3a + 1 - a \neq 0 \end{cases}$ 所以 $a = -1$, 所以 $d = \frac{\sqrt{2}}{4}$

18. 解: (1) 设圆的标准为 $(x-3)^2 + y^2 = r^2$, 把 $A(0,4)$ 代入得 $r = 5$,

故圆的标准方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 25$;

①当直线 AB 的斜率不存在时, 直线 AB 的方程为 $x = 0$, 此时弦 AB 长为 8, 符合题意;

②当直线 AB 的斜率存在时, 设直线 AB 的方程为 $y = kx + 4$,

$$d = \frac{|3k + 4|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$$

解得 $k = -\frac{7}{24}$, 所以直线 AB 的方程为 $7x + 24y - 96 = 0$,

综上所述, 直线 AB 的方程为 $x = 0$ 或 $7x + 24y - 96 = 0$;

(2) 由 (1) 得, 圆 C 的半径为 5,

过点 A 作直线 l , 若圆 C 上只有一个点到直线 l 的距离为 10, 则直线 l 与圆 C 相切,

又 $k_{AC} = \frac{4-0}{0-3} = -\frac{4}{3}$, 所以直线 l 的斜率为 $\frac{3}{4}$,

所以直线 l 的方程为 $y - 4 = \frac{3}{4}(x - 0)$,

即 $3x - 4y + 16 = 0$,

则点 P 到直线 l 的最大距离 $d_{\max} = \frac{16}{\sqrt{9+16}} + 1 = \frac{21}{5}$

即点 P 到直线 l 的距离的最大值为 $\frac{21}{5}$.

19.解: (1) 根据题意可设抛物线的方程为 $x^2 = 2py$ ($p > 0$), 代入点 $P(2, 2)$ 得 $4 = 4p$, 解得 $p = 1$,

所以抛物线的标准方程 $x^2 = 2y$, 准线方程为 $y = -\frac{1}{2}$;

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} x^2 = 2y \\ y = x + b \end{cases}$, 消 y 得: $x^2 - 2x - 2b = 0$,

$\Delta = 4 + 8b > 0$, 则 $b > -\frac{1}{2}$, $x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = -2b$,

因为以 AB 为直径的圆过原点 O ,

所以 $OA \perp OB$, 则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$,

即 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$,

即 $x_1 x_2 + (x_1 + b)(x_2 + b) = 2x_1 x_2 + b(x_1 + x_2) + b^2 = 0$,

所以 $4 - b^2 = 0$, 解得 $b = \pm 2$,

又 $b > -\frac{1}{2}$, 所以 $b = 2$, 所以直线 l 的方程为 $y = x + 2$.

20.解: (1) 由题 $\begin{cases} \frac{b}{a} = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, 所以 $a = b = 1$, 所以双曲线方程 $x^2 - y^2 = 1$

由题直线 PQ 的斜率必定存在, 则有 $k_{PQ} \cdot k_{OA} = 1$, 所以 $k_{PQ} = 2$

所以直线 PQ 的方程为 $y = 2x - 3$,

联立直线和双曲线方程可求 $|PQ| = \frac{2\sqrt{30}}{3}$

由题当 M 为 PQ 的平行线与双曲线左支的交点时, $\triangle MPQ$ 的面积最小.

设直线方程 $y = 2x + m$, 则 $\begin{cases} y = 2x + m \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

即 $-3x^2 - 4mx - m^2 - 1 = 0$,

解 $\Delta = 4m^2 - 12 = 0$ 可得 $m = \pm\sqrt{3}$ (舍负)

则 $d_{M \rightarrow PQ} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{15}}{5}$

则 $S_{\triangle MPQ} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

21.解: (1) 由题平面 $AGD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 且交线为 AG , $EG \perp AG$

所以 $EG \perp$ 平面 AGD_1

则多面体 D_1AGC_1BH 为直三棱柱, 则 $V = \sqrt{3}$

(2) 由题 $EG \perp AG$, $DG \perp AG$

所以 $AG \perp$ 平面 GD_1C_1H

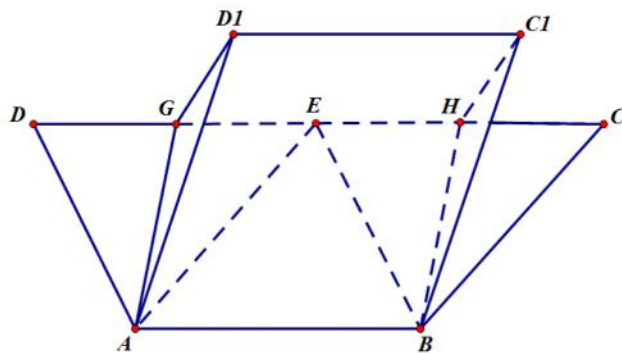
以 G 为原点, GA 为 x 轴, GH 为 y 轴 GQ 为 z 轴, 其中 $GQ \perp$ 平面 $ABCD$, 则 Q 在平面 GD_1C_1H 内.

舍 $D_1(0, y, z)$, $B(\sqrt{3}, 2, 0)$ 则有

$$\begin{cases} \sqrt{3 + (2-y)^2 + z^2} = \sqrt{6} \\ \sqrt{y^2 + z^2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } y = \frac{1}{2}, z = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

于是 $D_1(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), C_1(0, \frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$



$$\text{则 } \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{D_1M} = \overrightarrow{BD_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{HB} = (\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{HC_1} = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

设平面 HBC_1 的法向量为 $\vec{n} = (x_0, y_0, z_0)$

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{1}{2}y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_0 = 0, \text{ 令 } z_0 = 1 \\ \sqrt{3}x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } y_0 = -\sqrt{3}, x_0 = 0$$

$$\text{则 } \vec{n} = (0, -\sqrt{3}, 1)$$

$$\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BM}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{7}}{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

直线 BM 与平面 BHC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

22.解. (1) 由题可得

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) 可得 $A(2, 0), B(0, 1)$, 设直线 AP 的斜率为 m , 则 BQ 的斜率为 $-m$, 设

$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

则直线 AP 的方程为 $y = m(x - 2)$, 直线 BQ 的方程为 $y = -mx + 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = m(x-2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 可得 } (1+4m^2)x^2 - 16m^2x + 16m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{则 } 2x_1 = \frac{16m^2 - 4}{1 + 4m^2}, \text{ 即 } x_1 = \frac{8m^2 - 2}{1 + 4m^2}, \text{ 则 } y_1 = \frac{-4m}{1 + 4m^2},$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -mx + 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (1+4m^2)x^2 - 8mx = 0, \text{ 则}$$

$$x_2 = \frac{8m}{1 + 4m^2}, \text{ 则 } y_2 = \frac{1 - 4m^2}{1 + 4m^2},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的斜率 } k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{-4m}{1+4m^2} - \frac{1-4m^2}{1+4m^2}}{\frac{8m^2-2}{1+4m^2} - \frac{8m}{1+4m^2}} = \frac{1}{2} \text{ 为定值};$$

(3) 设直线 PQ 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + n$, 因为 P 在第一象限, 所以 $-1 < n < 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + n \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 可得 } x^2 + 2nx + 2n^2 - 2 = 0, \text{ 则 } x_1 + x_2 = -2n, x_1x_2 = 2n^2 - 2,$$

$$\text{则 } |PQ| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{4n^2 - 4(2n^2 - 2)} = \sqrt{10 - 5n^2},$$

$$\text{点 } A \text{ 到直线 } PQ \text{ 的距离为 } d_1 = \frac{|2 + 2n|}{\sqrt{5}} = \frac{2 + 2n}{\sqrt{5}},$$

$$\text{点 } B \text{ 到直线 } PQ \text{ 的距离为 } d_2 = \frac{|-2 + 2n|}{\sqrt{5}} = \frac{2 - 2n}{\sqrt{5}},$$

$$\text{所以 } S_{APBQ} = S_{\triangle APQ} + S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot (d_1 + d_2) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10 - 5n^2} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{2 - n^2},$$

因为 $-1 < n < 1$, 所以可得四边形 $APBQ$ 面积的取值范围为 $[2, 2\sqrt{2}]$.

