

数学试题

(满分 150 分, 120 分钟完成)

| | |
|-----|-----------|
| 命题人 | 高中数学命题组 |
| 审题人 | 高中数学命题组组长 |

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的两个焦点, 直线过 F_1 交椭圆于 A, B 两点, 则 $\triangle AF_2B$ 的周长是 ().

- A. 10 B. 15 C. 20 D. 25

2. 已知直线 $l_1: (k-3)x + (4-k)y + 1 = 0$ 与 $l_2: 2(k-3)x - 2y + 3 = 0$ 平行, 则 k 的值是 ().

- A. 1 B. 3 或 5 C. 5 D. 1 或 3

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别为 AD, C_1D_1 的中点, O 为侧面 BCC_1B_1 的中心, 则异面直线 MN 与 OD_1 所成角的正弦值为 ().

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{35}}{6}$

4. 已知两点 $M(2, \sqrt{3}+1), N(4, -2)$, 直线 $l: mx + y - m - 1 = 0$ 与线段 MN 相交, 则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 ().

- A. $[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$ B. $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$ C. $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}]$ D. $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$

5. 已知直线 l_1, l_2 的斜率是方程 $x^2 + mx - 2 = 0$ 的两个根, 则 ().

- A. $l_1 \parallel l_2$ B. $l_1 \perp l_2$ C. l_1 与 l_2 相交但不垂直 D. l_1 与 l_2 的位置关系不确定

6. 圆 $C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ 上到直线 $l: x + y - \sqrt{2} = 0$ 的距离为 $\frac{1}{2}$ 的点的个数为 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7. 已知点 P 在直线 $l: 3x + 4y - 20 = 0$ 上, 过点 P 的两条直线与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 分别相切于 A, B 两点, 则圆心 O 到直线 AB 的距离的最大值为 ().

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. 1

8. 在四面体 $ABCD$ 中, $AB \perp$ 平面 BCD , $AB=8$, $BD=CD=3\sqrt{2}$, $\angle BCD=45^\circ$. 若 E, F 是四面体 $ABCD$ 外接球表面上的两点, 且 $EF=2\sqrt{21}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最大值为 ()

- A. 32 B. 28 C. 21 D. 16

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法不正确的是 ()

A. “ $a=-1$ ”是“直线 $a^2x-y+1=0$ 与直线 $x-ay-2=0$ 互相垂直”的充要条件

B. 直线 $2x-y-1=0$ 的一个方向向量为 $(-1, 2)$

C. 经过点 $P(1, 1)$, 倾斜角为 θ 的直线方程为 $y-1=\tan\theta(x-1)$

D. 直线 $l: 3x-2y+5=0$, $P(m, n)$ 为直线 l 上动点, 则 $(m+1)^2+n^2$ 的最小值为 $\frac{4}{13}$

10. 对于曲线 $C: \frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{k-3} = 1$, 下列说法正确的是 ()

A. 曲线 C 不可能是圆

B. “ $3 < k < 9$ ”是“曲线 C 是椭圆”的充分不必要条件

C. “曲线 C 是焦点在 y 轴上的椭圆”是“ $6 < k < 7$ ”的必要不充分条件

D. “曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆”是“ $3 < k < 6$ ”的充要条件

11. 已知圆 $C: x^2+y^2-4y+3=0$, 一条光线从点 $P(2, 1)$ 射出经 x 轴反射, 下列结论正确的是 ()

A. 若反射光线与圆 C 相切, 则反射光线的斜率一定为 $-6+\sqrt{15}$

B. 若反射光线平分圆 C 的周长, 则入射光线所在直线方程为 $3x-2y-4=0$

C. 若反射光线与圆 C 相切于 A , 与 x 轴相交于点 B , 则 $|PB|+|BA|=2$

D. 若反射光线与圆 C 交于 M, N 两点, 则 $\triangle CNM$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}$

12. 如图, 在棱长为 $3\sqrt{3}$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 是平面 A_1BC_1 内一个动点, 且满 $DP+PB_1=5+2\sqrt{13}$,

则下列正确的是 ()

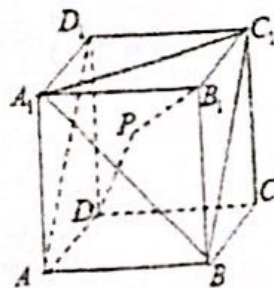
(参考数据: $\sin 53^\circ = \frac{4}{5}$, $\sin 37^\circ = \frac{3}{5}$)

A. $PB \perp B_1D$

B. 直线 B_1P 与平面 A_1BC_1 所成角为 53°

C. 点 P 的轨迹是一个圆

D. 设直线 B_1P 与直线 AD_1 所成角为 θ , 则 $37^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$



第II卷(非选择题 共90分)

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。请将答案填写在答题卡相应的位置上

13. 直线 $3x+4y+3=0$ 与直线 $6x+8y+11=0$ 间的距离是_____。

14. 已知圆 C 关于直线 $x-y+1=0$ 对称的圆的方程 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ ，则圆 C 的方程为_____。

15. 已知直线 $l: (2m+2)x+(1-4m)y-2m-7=0$ ，则直线 l 恒过定点_____；若 O 为坐标原点，直线 l 与 x, y

轴的正半轴分别交于 A, B 两点，则 $\triangle OAB$ 面积的最小值为_____。

16. 在平面直角坐标系中，已知圆 $C_1: (x+4)^2+(y-2)^2=9$ 和圆 $C_2: (x-5)^2+(y-6)^2=9$ ，设 P 为平面上的点，若满足：存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2 ，它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交，且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等，则所有满足条件的点 P 的坐标是_____。

四、解答题：本大题共6小题，共70分。其中，17题10分，18, 19, 20, 21, 22各12分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。请将答案填写在答题卡相应的位置上。

17. 已知直线 l 过点 $P(2,2)$ 。

(1) 若直线 l 与 $3x-y+6=0$ 垂直，求直线 l 的方程；

(2) 若直线 l 在两坐标轴上的截距相等，求直线 l 的方程。

18. 已知圆心为 C 的圆经过 $A(1,1), B(2,-2)$ 两点，且圆心 C 在直线 $l: x-y+1=0$ 上

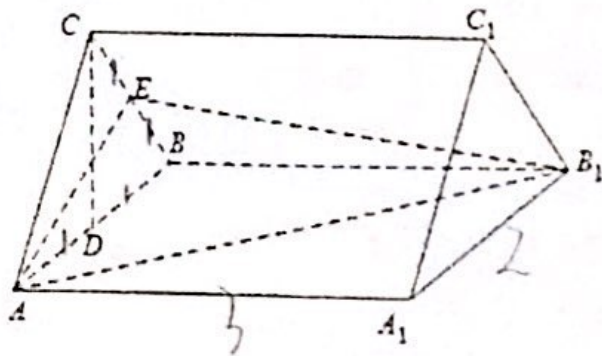
(1) 求圆 C 的标准方程。

(2) 过点 $P(6,7)$ 引圆 C 的一条切线，切点为 Q ，求线段 PQ 的长。

19. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 \perp$ 平面 ABC ， $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形， $AA_1=3$ ， D, E 分别为 AB, BC 的中点。

(1) 求证： $CD \perp$ 平面 AA_1B_1B 。

(2) 求直线 BC 与平面 AB_1E 所成角的正弦值。



20. 在 $\triangle ABC$ 中 a, b, c 为角 A, B, C 所对的边, 且 $\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{b}{2a-c}$.

(1) 求角 B 的值;

(2) 若 $b = \sqrt{3}$, 求 $2a - c$ 的取值范围.

21. 已知点 E 是圆 $C: (x-3)^2 + y^2 = 4$ 上的动点, 点 $F(-3, 0)$, M 是线段 EF 的中点, $P(m, 0)$ ($m \neq 0$) 是 x 轴上

的一个动点.

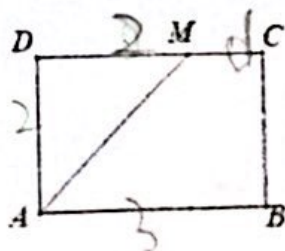
(1) 求点 M 的轨迹方程;

(2) 当点 M 的轨迹上存在点 Q , 使 $\angle OPQ = 60^\circ$, 求实数 m 的取值范围;

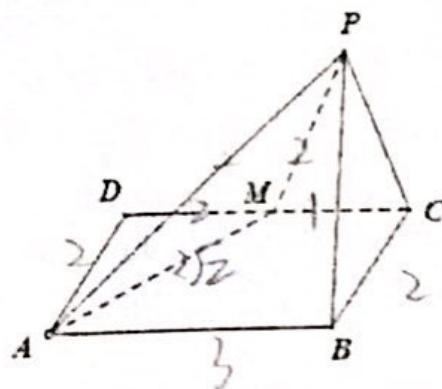
22. 如图①所示, 长方形 $ABCD$ 中, $AD = 2$, $AB = 3$, 点 M 是边 CD 靠近点 C 的三等分点, 将 $\triangle ADM$ 沿 AM 翻折到 $\triangle PAM$, 连接 PB, PC , 得到图②的四棱锥 $P-ABCM$.

(1) 求四棱锥 $P-ABCM$ 的体积的最大值;

(2) 设 $P-AM-D$ 的大小为 θ , 若 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 求平面 PAM 和平面 PBC 夹角余弦值的最小值.



图①



图②