

重庆外国语学校

2021-2022 学年上期 9 月检测

高一数学试题

(满分 150 分, 120 分钟完成)

命题人	刘晓煜
审题人	郭海峰

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

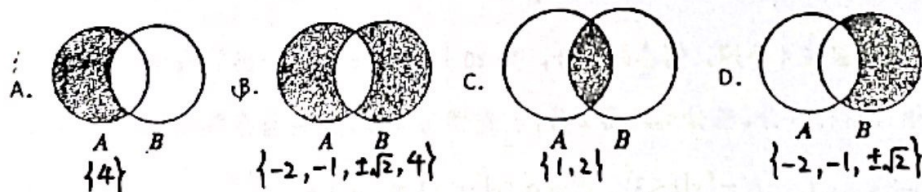
一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求. 请将答案填写在答题卡相应的位置上.

A 1. 下列各组集合表示同一集合的是

- A. $M = \{4, 5\}, N = \{5, 4\}$
- B. $M = \{(x, y) | x + y = 1\}, N = \{y | x + y = 1\}$
- C. $M = \{(3, 2)\}, N = \{(2, 3)\}$
- D. $M = \{1, 2\}, N = \{(1, 2)\}$

D 2. 集合 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{x | x^2 \in A\}$, 将集合 A, B 分别用如图中的两个圆表示, 则圆中阴影部分表示的集合中元素个数恰好为 4 的是

$$B = \{\pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm 2\}$$



C 3. 若集合 $A = \{x | x = \frac{1}{9}(2k+1), k \in \mathbb{Z}\}, B = \{x | x = \frac{4}{9}k \pm \frac{1}{9}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则集合 A, B 之间的关系为

- A. $A \subsetneq B$
- B. $B \subsetneq A$
- C. $A = B$
- D. A 和 B 互不包含

C 4. 设集合 $A = \{x | 1 < x + 2 < 4\}, B = \{x | x \geq a\}$, 且 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $a \leq -1$
- B. $a \leq 2$
- C. $a < 2$
- D. $a > 2$

D 5. 已知 $x > 3$, 且 $x + \frac{4}{x-3}$ 的最小值为

- A. 10
- B. 9
- C. 8
- D. 7

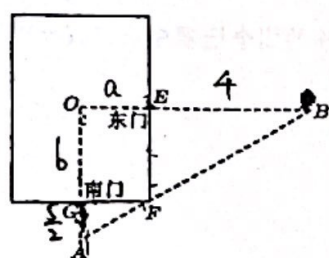


A 6. “ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 0 \end{cases}$ ” 是 “ $\begin{cases} -1 \leq x+y \leq 1 \\ 1 \leq x-y \leq 3 \end{cases}$ ” 是成立的

- A. 必要不充分条件
B. 充分不必要条件
C. 充要条件
D. 既非充分也非必要条件

- D 7. 《九章算术》是中国传统数学最重要的著作，奠定了中国传统数学的基本框架，其中卷第九勾股中记载：“今有邑，东西七里，南北九里，各中开门。出东门一十五里有木。问出南门几何步而见木？”其算法为：东门南到城角的步数，乘南门东到城角的步数，乘积作被除数，以树距离东门的步数作除数，被除数除以除数得结果，即出南门 x 里见到树，则 $x = \frac{(9 \times \frac{1}{2}) \times (7 \times \frac{1}{2})}{15}$ 。若一小城，如图所示，出东门 1200 步有

树，出南门 750 步恰能见到此树，则该小城的周长的最小值为（注：1 里=300 步）



$$\frac{1}{4}ab = 4 \times \frac{5}{2} = 10 \Rightarrow ab = 40$$

$$\therefore (a+b)^2 \geq 4ab = 160$$

$$\therefore a+b \geq 4\sqrt{10}$$

$$\therefore C = 2(a+b) \geq 8\sqrt{10}$$

当且仅当 $a=b=2\sqrt{10}$ 时，取“=”。

- A. $2\sqrt{10}$ 里
B. $4\sqrt{10}$ 里
C. $6\sqrt{10}$ 里
D. $8\sqrt{10}$ 里

- D 8. 已知实数 $x > y > 0$ ，则 $xy + \frac{x+2y}{y^2(x-y)}$ 的最小值是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= xy + \frac{x-y+3y}{y^2(x-y)} = xy + \frac{1}{y^2} + \frac{3}{xy-y^2} \\ &= xy - y^2 + \frac{3}{xy-y^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} \geq 2 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

A. 6

B. $\frac{11}{2}$

C. $\frac{11}{4} + 2\sqrt{2}$

D. $2 + 2\sqrt{3}$

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} + 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 时，取“=”。}$$

二、多项选择题，本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，部分选对得 2 分；有选错得 0 分。请将答案填写在答题卡相应位置。

- BC 9. 若集合 $M = \{x | -3 < x < 1\}$ ， $N = \{x | x \leq 3\}$ ，则集合 $\{x | x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 1\} =$

- A. $M \cap N$
B. $\complement_{\mathbb{R}} M$
C. $\complement_{\mathbb{R}} (M \cap N)$
D. $\complement_{\mathbb{R}} (M \cup N)$

- ABC 10. 已知 a, b, c, d 均为实数，下列不等关系推导不正确的是

- A. 若 $a > b$ ， $c < d$ ，则 $a+c > b+d$
B. 若 $a > b$ ， $c > d$ ，则 $ac > bd$
C. 若 $bc-ad > 0$ ， $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$ ，则 $ab < 0$
D. 若 $a > b > 0$ ， $c > d > 0$ ，则 $\sqrt{\frac{a}{d}} > \sqrt{\frac{b}{c}}$



AD 11. 下列命题中是真命题的是

A. “ $x > 1$ ”是“ $x^2 > 1$ ”的充分不必要条件

B. 命题“ $\forall x < 1$, 都有 $|x| < 1$ ”的否定是“ $\exists x_0 \geq 1$, 使得 $|x_0| \geq 1$ ”

C. 不等式 $2x^2 - 5x - 3 > 0$ 成立的一个必要不充分条件是 $x \leq -\frac{1}{2}$ 或 $x \geq \frac{3}{2}$

D. “ $x < y < 0$ ”是“ $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ ”的充分条件

ABD 12. 对任意 $A, B \subseteq R$, 定义 $A \oplus B = \{x | x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$. 例如, 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$,

则 $A \oplus B = \{1, 4\}$, 下列命题中为真命题的是

A. 若 $A, B \subseteq R$ 且 $A \oplus B = B$, 则 $A = \emptyset$

B. 若 $A, B \subseteq R$ 且 $A \oplus B = \emptyset$, 则 $A = B$

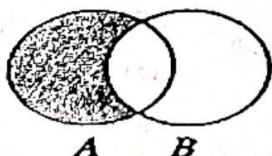
C. 若 $A, B \subseteq R$ 且 $A \oplus B \subseteq A$, 则 $A \subseteq B$ $B \subseteq A$

D. 若 $A, B \subseteq R$, 则 $(\complement_R A) \oplus B = \complement_R (A \oplus B)$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请将答案填写在答题卡相应的位置上.

13. 已知全集 $U = R$, 集合 $A = \{x \in N | (x+1)(x-3) \leq 0\}$, $B = \{y | y = x^2 + 1\}$, 则下列 Venn 图中阴影部分表示的集合为 $\{0\}$ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $A \cap \complement_R B = \{0\}$



$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -\frac{1}{8} \end{cases}$$

A 中有两个元素

14. 已知集合 $A = \{x | (m-1)x^2 + 3x - 2 = 0\}$ 恰有两个非空真子集, 则实数 m 的取值范围是 $\{m | m > -\frac{1}{8} \text{ 且 } m \neq 1\}$

15. 已知不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x > 2\}$, 则关于 x 的不等式 $ax^2 - bx + c \leq 0$ 的解集

为 $\{x | -2 \leq x \leq -\frac{1}{2}\}$

$$\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow b = -\frac{5}{2}a \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \Rightarrow c = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax^2 - bx + c \leq 0 \\ \Rightarrow ax^2 + \frac{5}{2}ax + a \leq 0 \\ \Rightarrow -2 \leq x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y = 2 - x > 0 &\Rightarrow 0 < x < 2 \\ \frac{x}{3-x} + \frac{3}{x} &= \frac{x^2 - 3x + 9}{-x^2 + 3x} = -\frac{9}{x^2 - 3x} - 1 \geq 3 \\ x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2} \text{ 时, 取“} = \text{”.} \end{aligned}$$

16. 已知 $x > 0, y > 0$ 且 $x + y = 2$, 则 $\frac{x}{y+1} + \frac{3}{x}$ 的最小值是 3

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 其中, 17 题 10 分, 18, 19, 20, 21, 22 各 12 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 请将答案填写在答题卡相应的位置上.



扫描全能王 创建

$$U = \{x | x \geq -5\} \quad A = \{x | -4 < x < 2\} \quad B = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$$

17. 设集合 $U = \{x | y = \sqrt{x+5}\}$, $A = \{x | \begin{cases} x+4 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$.

(1) 求集合 $A \cup B, A \cap B$; (2) 求集合 $(C_U A) \cup (C_U B)$.

$$(1) A \cup B = \{x | -4 < x \leq 3\} \quad (\Rightarrow (C_U A) \cup (C_U B) = C_U(A \cap B) = \{x | -5 \leq x < -1 \text{ 或 } x \geq 2\})$$

$$A \cap B = \{x | -1 \leq x < 2\}$$

18. 已知集合 $A = \{x | 2 < x < 4\}$, 集合 $B = \{x | 3m < x < 1-m\}$.

$$\begin{aligned} (2) A \subseteq B \\ \begin{cases} 3m \leq 2 \\ 1-m \geq 4 \end{cases} \Rightarrow m \leq -3 \\ \therefore m \in (-\infty, -3] \end{aligned}$$

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围;

(2) 命题 $P: x \in A$, 命题 $q: x \in B$, 若 P 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

$$(1) B = \emptyset, 3m \geq 1-m, B \neq \emptyset, m < \frac{1}{4} \text{ 或 } m < \frac{1}{4} \Rightarrow -1 \leq m < \frac{1}{4} \therefore m \in [-1, \frac{1}{4})$$

$$\Rightarrow m \geq \frac{1}{4}$$

19. 运货车以每小时 x 千米的速度匀速行驶 130 千米, 按交通法规限制 $50 \leq x \leq 100$ (单位: 千米/时). 假设汽

油的价格是每升 2 元, 而汽车每小时耗油 $(2 + \frac{x^2}{360})$ 升, 司机的工资是每小时 14 元.

(1) 求这次行车总费用 y 关于 x 的表达式;

(2) 当 x 为何值时, 这次行车的总费用最低, 并求出最低费用的值. $\because 50 \leq x \leq 100, \therefore x = 18\sqrt{10}$ 舍去.

$$(1) y = \frac{13x^2 + 42120}{18x} \quad (2) y = \frac{13}{18} \cdot (x + \frac{3240}{x}) \geq 26\sqrt{10}, \text{ 当且仅当 } x = 18\sqrt{10} \text{ 时, 取 " = "}$$

20. 已知关于 x 不等式 $ax^2 - (a+b)x + b > 0$.

(1) 若不等式的解集为 $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > b\}$, 求实数 a 的值;

(2) 若 $b = -1$, 解该不等式.

$$(1) (a(x-2)(x-b) > 0)$$

$$(2) (a+1)(x-1) > 0$$

$$\begin{aligned} a < -1 \text{ 时, } \{x | -\frac{1}{a} < x < 1\} \\ a = -1 \text{ 时, } x \in \emptyset \\ -1 < a < 0 \text{ 时, } \{x | 1 < x < -\frac{1}{a}\} \\ a = 0 \text{ 时, } \{x | x > 1\} \\ a > 0 \text{ 时, } \{x | x < -\frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\} \end{aligned}$$

21. 求证: 方程 $x^2 + kx + 2 = 0$ 与 $x^2 + 2x + k = 0$ 有一个公共实数根的充要条件是 $k = -3$.

生证必要性, $k = -3$ 时,

再证充分性,

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ 得证.}$$

$$\begin{cases} x^2 + kx + 2 = 0 \\ x^2 + 2x + k = 0 \end{cases} \Rightarrow (k-2)(x-1) = 0 \text{ 当 } k=2 \text{ 时, 两个方程同解, 矛盾; } \therefore x=1, \text{ 则 } k=-3.$$

$$\therefore k=2 \text{ 或 } x=1$$

22. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 满足对任意实数 x , 不等式 $2x \leq ax^2 + bx + c \leq \frac{1}{2}(x+1)^2$ 恒成立.

(1) 求 $a+b+c$ 的值; $\text{令 } x=1 \text{ 则 } 2 \leq a+b+c \leq 2 \Rightarrow a+b+c=2$

(2) 若该二次函数与 x 轴有两个不同的交点, 其横坐标分别为 x_1, x_2 .

① 求 a 的取值范围;

② 证明: $x_1 x_2$ 为定值.

(2) 由题知: $ax^2 + (b-2)x + c \geq 0$ 恒成立.

且 $(1-2a)x^2 + 2(1-b)x + 1-2c \geq 0$ 也恒成立.

$\therefore a \neq 0$ 故当 $1-2a \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{cases} (b-2)^2 - 4ac \leq 0 \\ 4(1-b)^2 - 4(1-2a)(1-2c) \leq 0 \\ 1-2a > 0 \end{cases}$$

将 $b=2-a-c$ 代入得:

$$\begin{cases} a=c \\ 0 < a < \frac{1}{2} \end{cases}$$

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\begin{cases} 2(1-b)=0 \\ 1-2c=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

此时, $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$ 不满足题意.

$\therefore ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不同的实根.

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (2-2a)^2 > 4a^2 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$$

且 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1$ 为定值.

综上: $a \in (0, \frac{1}{2})$, $x_1 x_2 = 1$ 为定值.



扫描全能王 创建