

数学试题

(满分 150 分, 120 分钟完成)

命题人	向波洋
审题人	李鹏贤

一、选择题: 共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 那么 A 的子集的个数是

- A. 3 B. 7 C. 8 D. 9

2. 命题 “ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + 1 < 0$ ” 的否定是

- A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0$ B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 0$

- C. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + 1 \leq 0$ D. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + 10$

3. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x}} + \frac{2x}{x-3}$ 的定义域为

- A. $(-1, +\infty)$ B. $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$

- C. $[-1, 3) \cup (3, +\infty)$ D. $(-1, 3)$

4. 设 a, b 为实数, 则 “ $a - b > 0$ ” 是 “ $a^2 - b^2 > 0$ ” 的

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x > 0 \\ -x + a, & x \leq 0 \end{cases}$ 的值域为 $[1, +\infty)$, 则 a 的最小值为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$ 的单调递减区间为

- A. $(-\infty, -\frac{3}{2})$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(\frac{3}{2}, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$

7. 已知 $g(x)$ 为定义在 R 上的奇函数, 且对任意的正数 $a \neq b$, 有 $\frac{g(a)-g(b)}{a-b} < 0$, 且 $f(x) = g(x) + 2$,

若 $f(m) + f(m-2) > 4$, 则实数 m 的取值范围是

- A. $(3, +\infty)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

8. 函数 $f(x) = \sqrt{-x^2 + bx + c}$ 的定义域为 D , 对于 D 内的任意 x 都有 $f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$ 成立, 则

$b \cdot c + f(3)$ 的值为

- A. 6 B. 0
C. 5 D. 以上答案均不正确

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 列各组函数中, 两个函数是同一函数的有

- A. $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$ B. $f(x) = x+1$ 与 $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
C. $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 与 $g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ D. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ 与 $g(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$

10. 已知函数 $f(x) = |x| - x^2$, 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$ B. $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上是增函数
C. $f(x) > 0$ 的解集为 $(-1, 1)$ D. $f(x) + 2x \geq 0$ 的解集为 $[0, 3]$

11. 已知实数 a, b 满足 $a^2 - ab + b = 0 (a > 1)$, 下列结论中正确的是

- A. $b \geq 4$ B. $2a + b \geq 8$ C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1$ D. $a + \frac{a}{b} > 1$

12. 狄利克雷函数是高等数学中的一个典型函数, 若 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in C_R Q \end{cases}$, 则称 $f(x)$ 为狄利克雷

函数. 对于狄利克雷函数 $f(x)$, 给出下面 4 个命题: 其中真命题的有

- A. 对任意 $x \in R$, 都有 $f[f(x)] = 1$
B. 对任意 $x \in R$, 都有 $f(-x) + f(x) = 0$
C. 对任意 $x_1 \in R$, 都存在 $x_2 \in Q$, $f(x_1 + x_2) = f(x_1)$
D. 若 $a < 0, b > 1$, 则有 $\{x | f(x) > a\} = \{x | f(x) < b\}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 满足集合 $\{1, 2\} \subsetneq M \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 M 的个数是_____.

14. 设函数 $f(x)$ 是定义域为 R 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x(1-x)$, 求 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的解析式为_____.

15. 若命题 “ $\exists x \in R$, 使得 $ax^2 + 2ax - 1 \geq 0$ ” 为假命题, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax, & x \leq 1 \\ 2ax - 5, & x > 1 \end{cases}$, 若存在 $x_1, x_2 \in R$ 且 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

四. 解答题: 共 70 分. 第 17 题 10 分, 其余各题 12 分. 解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m-1 \leq x \leq 2m+3\}$.

(1) 若 $m = 4$, 求 $A \cup B$;

(2) 若 $A \cap B = B$, 求实数 m 的取值范围.

18. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的函数.

(1) 用定义法证明函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是增函数;

(2) 解不等式 $f(x-1) + f(x) < 0$.

19. (12 分)

已知函数 $f(x) = -x^2 + (a+1)x (a \in R)$.

(1) 若对于任意 $x \in [1, 2]$, 恒有 $f(x) \geq 2x^2$ 成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $a \geq 2$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值 $g(a)$.

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 4a$.

(1) 解关于 x 的不等式 $f(x) < 0$;

(2) 函数 $g(x) = (a+4)x + a^2 - a + 5$, x_1, x_2 为方程 $f(x) + g(x) = 0$ 的两个实根, 求 $x_1^2 + x_2^2$ 的最大值.

21. (12 分)

为了加强“平安校园”建设, 有效遏制涉校案件的发生, 保障师生安全, 某校决定在学校门口利用一侧原有墙体, 建造一间墙高为 3 米, 底面为 24 平方米, 且背面靠墙的长方体形状的校园警务室. 由于此警务室的后背靠墙, 无需建造费用, 甲工程队给出的报价为: 屋子前面新建墙体的报价为每平方米 400 元, 左右两面新建墙体报价为每平方米 300 元, 屋顶和地面以及其他报价共计 14400 元. 设屋子的左右两面墙的长度均为 x 米 ($3 \leq x \leq 6$).

(1) 解左右两面墙的长度为多少时, 甲工程队报价最低? 并求出最低报价.

(2) 现有乙工程队也要参与此警务室的建造竞标, 其给出的整体报价为 $\frac{1800a(1+x)}{x}$ 元

($a > 0$), 若无论左右两面墙的长度为多少米, 乙工程队都能竞标成功, 试求 a 的取值范围.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = x|x-2m|$, $m \in \mathbb{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 (只要求写出正确结论)

(2) 若函数 $F(x) = f(x) + 4m^2$ 在 $[2, 4]$ 上的最小值为 12, 求实数 m 的值.