

## 数学试题

(满分 126 分, 90 分钟完成)

命题人	肖必伦
审题人	石桥

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{x \in \mathbb{N}^+ | \log_2 x < 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ , 则集合  $A \cup B$  的元素个数为 ( )

A. 2 B. 3 C. 8

2. “ $ab > 0$ ”是“ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ ”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 下列命题中, 是真命题的是 ( )

A. 如果  $ac > bc$ , 那么  $a > b$  B. 如果  $ac^2 > bc^2$ , 那么  $a > b$   
C. 如果  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ , 那么  $a > b$  D. 如果  $a > b, c > d$ , 那么  $a - c > b - d$

4. 集合  $A = \{x \in \mathbb{N} | x > 6\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x > 0\}$ , 则  $(A, A) \cap B =$  ( )

A.  $\{3, 4, 5\}$  B.  $\{4, 5, 6\}$  C.  $\{x | 3 < x \leq 6\}$  D.  $(-\infty, 0) \cup (3, 6]$

5. 设  $a \in \mathbb{R}$ , 若关于  $x$  的不等式  $x^2 - ax + 1 \geq 0$  在  $1 \leq x \leq 2$  上有解, 则 ( )

A.  $a \leq 2$  B.  $a \geq 2$  C.  $a \leq \frac{5}{2}$  D.  $a \geq \frac{5}{2}$

6. 已知  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a + b + c = 0$ ,  $abc > 0$ ,  $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ , 则 ( )

A.  $T > 0$  B.  $T < 0$  C.  $T = 0$  D.  $T \geq 0$

7. 实数  $x, y$  满足  $-4 \leq x - y \leq -1$ ,  $-1 \leq 4x - y \leq 5$ ,  $z = 9x - y$  取值范围是 ( )

A.  $\{z | -7 \leq z \leq 26\}$  B.  $\{z | -1 \leq z \leq 20\}$  C.  $\{z | 4 \leq z \leq 15\}$  D.  $\{z | 1 \leq z \leq 15\}$

8. 下列命题正确的个数是 ( )

①  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  ( $ab > 0$ )

② 若  $a > b > 0$ ,  $c < d < 0$ , 则  $ac < bd$

③ 不等式  $1 + \frac{1}{x} > 0$  成立的一个充分不必要条件是  $x < -1$  或  $x > 1$

④ 若  $a_1, b_1, c_1$  ( $i = 1, 2$ ) 是全不为 0 的实数, 则  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$  是不等式  $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$  和  $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$  解集相同”的充分不必要条件

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知  $a, b$  为正实数, 且  $ab + 2a + b = 16$ , 则 ( )

A.  $ab$  的最大值为 8 B.  $2a + b$  的最小值为 8

C.  $a + b$  的最小值为  $6\sqrt{2} - 3$  D.  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2}$  的最小值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 《几何原本》中的几何代数法是以几何方法研究代数问题, 这种方法是后西方数学家处理问题的重要依据, 很多代数公理、定理都可以根据这一原理, 实现证明, 也称为无字证明。如图所示,  $AB$  是圆的直径, 点  $O$  为圆心, 点  $C$  是线段  $AB$  上的一点, 且  $AC = m$ ,  $BC = n$ 。过点  $C$  作垂直于  $AB$  的弦  $DE$ , 连接  $AD, BD, OD$ , 过点  $C$  作  $CF$  垂直于  $OD$  于点  $F$ , 则根据该图形我们可以完成的无字证明有 ( )

A.  $m^2 + n^2 \geq 2mn$  ( $m > 0, n > 0$ ) B.  $\sqrt{mn} \leq \frac{m+n}{2}$  ( $m > 0, n > 0$ )

C.  $\frac{m^2 + n^2}{2} \geq \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$  ( $m > 0, n > 0$ ) D.  $\sqrt{mn} \geq \frac{2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$  ( $m > 0, n > 0$ )

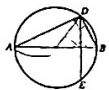
11. 以下说法正确的有 ( )

A. 实数  $x > y > 0$  是  $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$  成立的充要条件

B.  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$  对  $a, b \in \mathbb{R}$  恒成立

C. 命题“ $\exists x \in \mathbb{R}$ , 使得  $x^2 + x + 1 \geq 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbb{R}$ , 使得  $x^2 + x + 1 < 0$ ”

D. 若  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1, x > 0, y > 0$ , 则  $x + 2y$  的最小值是 8



12. 定义区间  $(m, n)$  的长度为  $n-m$ . 若满足  $\frac{x^2-a}{(x-1)(x-2)} < 0$  的  $x$  构成的区间的长度之和为 3, 则实数  $a$  的可能取值是 (

- A.  $\frac{1}{4}$  B.  $\frac{1}{3}$  C. 3 D. 4

三. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知  $a \in \mathbb{R}$ , 命题  $p: \exists x_0 \in [1, 2], a \geq x_0^2$ ; 命题  $q: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2ax + 4 \geq 0$ , 且  $p \wedge q$  为真命题, 则  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_

14. 已知集合  $A = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-1} = 2, x, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $B = \{(x, y) | 4x + ay - 16 = 0, x, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , 则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

15. 对于两个正整数  $m, n$ , 定义某种运算 " $\odot$ " 如下: 当  $m, n$  都为正偶数或正奇数时,  $m \odot n = m+n$ ; 当  $m, n$  中一个为正偶数, 另一个为正奇数时,  $m \odot n = mn$ , 则在此定义下, 集合  $M = \{(p, q) | p \odot q = 10, p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*\}$  中元素的个数是 \_\_\_\_\_.

16. 已知全集为  $U$ ,  $P \subseteq U$ , 定义集合  $P$  的特征函数为  $f_P(x) = \begin{cases} 1, & x \in P \\ 0, & x \in C_U P \end{cases}$ , 对于  $A \subseteq U, B \subseteq U$ ,

给出下列四个结论:

- ① 对  $\forall x \in U$ , 有  $f_{A \cup B}(x) + f_A(x) = 1$ ;  
② 对  $\forall x \in U$ , 若  $A \subseteq B$ , 则  $f_A(x) \leq f_B(x)$ ;  
③ 对  $\forall x \in U$ , 有  $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$ ;  
④ 对  $\forall x \in U$ , 有  $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)$ .

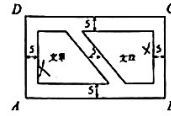
其中, 正确结论的序号是 \_\_\_\_\_.

四. 解答题: 本题共 4 小题, 共 46 分. 第 17 题 10 分, 其余解答题各 12 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知集合  $A = \{x | -x^2 + 2mx + 4 - m^2 \geq 0, m \in \mathbb{R}\}$ ,  $B = \{x | 2x^2 - 5x - 7 < 0\}$

- (1) 若  $A \cup B = \mathbb{R}$ , 求实数  $m$  的取值范围;  
(2) 若  $A \cap B = \left\{x | 0 \leq x < \frac{7}{2}\right\}$ , 求实数  $m$  的取值范围;  
(3) 若  $B \subseteq A$ , 求实数  $m$  的取值范围.

18. 如图, 某印刷需要在一张矩形白纸上刊登两篇招贴文章. 这两篇文章所占版面是两个形状、大小完全相同的直角梯形, 每个直角梯形的面积为  $150 \text{ cm}^2$ . 这两个梯形上下对齐, 且中心对称放置, 梯形与纸张的顶部、底部和两边都留有  $5 \text{ cm}$  的空白, 且这两个梯形之间也留有  $5 \text{ cm}$  的空白. 为了美观, 要求纸张所在矩形  $ABCD$  的边  $AB$  的长度大于边  $BC$  的长度. 设直角梯形的高为  $x \text{ cm}$ .



- (1) 求  $x$  的取值范围;  
(2) 如何选择纸张的尺寸, 才能使纸的用量最少?

19. (1) 已知  $a, b, c$  均为正实数, 求证:  $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c)$ .

(2) 已知  $x, y, z$  是互不相等的正数, 且  $x + y + z = 1$ , 求证:  $\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{1}{z} - 1\right) > 8$ .

20. 已知函数  $f(x) = x^2 - (a+1)x + 1$ .

- (1) 解关于  $x$  的不等式  $f(x) > -a + 1$ ;  
(2) 当  $a = 0$  时, 对  $\forall x \in [t, t+1]$ , 都有  $f(x) < 3$  恒成立, 求实数  $t$  的取值范围;  
(3) 当  $a = 0$  时, 对  $\forall x_1, x_2 \in [t, t+1]$ , 都有  $|f(x_1) - f(x_2)| < 4$  恒成立, 求实数  $t$  的取值范围.