

重庆外国语学校
2022-2023 学年度（上）高 2025 届半期检测

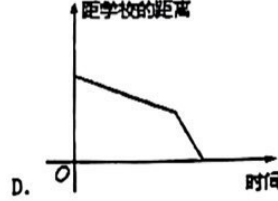
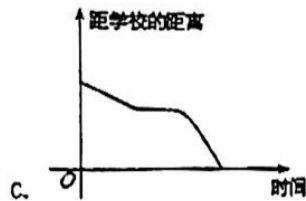
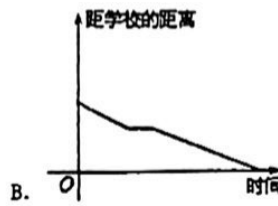
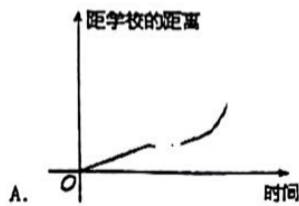
数学试题

（满分 150 分，120 分钟完成）

命题人	高中数学命题组
审题人	高中数学命题组组长

一、单项选择题（共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分。每小题的四个选项中，只有一个符合题目要求）

- 若集合 $P = \{x | x^2 + x - 2 \leq 0\}$, $Q = \{x \in \mathbb{Z} | -2 < x < 4\}$, 则 $P \cap Q =$ ().
A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
- 设 $a \in \mathbb{R}$, 则 “ $|a| \geq 10$ ” 是 “ $a^2 \geq 9$ ” 的 ().
A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不必要也不充分条件
- 函数 $y = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$ 的单调递增区间是 ().
A. $[-1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $[2, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$
- 小明骑车上学，开始时匀速行驶，途中因交通堵塞停留了一段时间，后为了赶时间加快速度行驶，与以上事件吻合得最好的图象是 ().



- 已知不等式 $ax^2 + bx - a^2 < 0$ 的解集是 $\{x | x > 9 \text{ 或 } x < -1\}$, 则 $a + b$ 的值为 ().

A. -27 B. -21 C. 27 D. 21

6. 设函数 $f(x) = x - \frac{2}{x} + 1$ 在 $[1, 4]$ 上的值域为 ()

- A. $\left[1, \frac{9}{2}\right]$ B. $[0, 1]$ C. $\left[0, \frac{9}{2}\right]$ D. $\left[\sqrt{2}, \frac{9}{2}\right]$

7. 设正实数 x, y 满足 $3x + \frac{y}{2} = 2$, 则 $\frac{4}{2x+1} + \frac{6}{y+1}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{9+6\sqrt{2}}{4}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\frac{7+4\sqrt{2}}{4}$ D. $4\sqrt{2}$

8. 已知函数 $f(x) = -x - x + 1$, 若对所有 $k \in (1, +\infty)$, 都有 $f(a^2 - \frac{3}{2}k) + f(-ka - \frac{1}{2}) < 2$ 成立, 则实数 a

的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ B. $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ C. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -1]$

二、多项选择题 (共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每小题的四个选项中, 有多个符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 下列说法错误的是 ()

- A. 若 $a > b, c < 0$, 则 $a^2c < b^2c$ B. 若 $a > b, c < 0$, 则 $a^3c < b^3c$
C. 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$ D. 若 $a < b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

10. 下列函数中, 既具有奇偶性, 又在 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是 ()

- A. $f(x) = \frac{5}{x}$ B. $f(x) = x^3$ C. $f(x) = -|x| + 2$ D. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -3x, & x > 0 \end{cases}$

11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax-1, & x < a \\ x^2-2ax+1, & x \geq a \end{cases}$, $f(x)$ 存在最小值时, 实数 a 的值可能是 ()

- A. 0 B. -1 C. 2 D. 1

12. 德国数学家黎曼 (Riemann) 提出的黎曼函数 $r(x)$ 在分析学中有广泛的应用. 黎曼函数 $r(x)$ 的定义为

$$r(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ \frac{1}{p}, & x = \frac{q}{p} (p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \text{ 且 } p, q \text{ 互素}), \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

下列命题中, 正确的有 ()

- A. 存在常数 $T > 0$, 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $r(x+T) = r(x)$

B. 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $r\left(\frac{1}{2}+x\right)=r\left(\frac{1}{2}-x\right)$

C. 存在 $a, b, a+b \in [0, 1]$, 使得 $r(a+b) > r(a)+r(b)$

D. 给定正整数 t , 记 $S = \left\{x \in [2022, 2023] \mid r(x) \geq \frac{1}{t}\right\}$, 则 S 有 $\frac{t^2-t+4}{2}$ 个元素

三、填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x)=x^2-1$, 则 $f(0)+f(-2)=$ _____.

14. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-3, 6)$ 则函数 $g(x)=f(2x)+\sqrt{2x+3}$ 的定义域为_____

15. 若函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x}, & x \geq 1 \\ -x^2+ax-4, & x < 1 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是_____

16. 已知 $f(x)=x|2a-x|$, $f(x)$ 在 $(0, 2]$ 上既有最大值, 又有最小值, 则 a 的取值范围为_____

四、解答题: (共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (满分 10 分) 已知集合 $A = \{x \mid m-1 < x < 2m+1\}$, $B = \{x \mid -2 < x < 4\}$.

(1) 当 $m = -\frac{5}{4}$ 时, 求 $A \cup B$;

(2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的取值范围.

18. (满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域和值域;

(2) 判断 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 与 $f(-x)$ 的关系, 并证明.

19. (满分 12 分) 已知函数 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的奇函数, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x)=x^3+x$.

(1) 当 $x > 0$, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $g(x)=f(x)+ax$ 在 $x \in (0, 1]$ 上的最大值为 2, 求实数 a 的取值范围.

20. (满分 12 分) 网红城市重庆现已成为许多外地游客必经之地, 在游玩结束后许多旅客会乘坐大巴离开. 已知某重庆长途汽车候车厅, 候车人数与时间 t 相关, 时间 t (单位: 小时) 满足 $0 < t \leq 24$, $t \in \mathbb{N}$. 经测算, 当 $16 \leq t \leq 24$ 时, 候车人数为候车厅满厅状态, 满厅人数 2580 人, 当 $0 < t < 16$ 时, 候车人数会减少, 减少人数与 $t(16-t)$ 成正比, 且时间为 6 点时, 候车人数为 1980 人, 记候车厅候车人数为 $f(t)$.

(1) 求 $f(t)$ 的表达式;

(2) 考虑到群众的身体健康, 每时需要提供的免费矿泉水瓶数为 $P = \frac{f(t)-1580}{16} + 160$, 则一天中哪个时间需要提供的矿泉水瓶数最少?

21. (满分 12 分) 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: ①对任意的 $x, y \in (0, +\infty)$, 都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$; ②当且仅当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$ 成立.

(1) 求 $f(1)$;

(2) 类比以下比较 $f(2)$ 与 $f(3)$ 的大小关系, 尝试判断 $f(x)$ 的单调性, 并用定义证明:

$$f(3) - f(2) = f\left(\frac{3}{2} \times 2\right) - f(2) = f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) - f(2) = f\left(\frac{3}{2}\right) < 0, \text{ 所以 } f(3) < f(2)$$

(3) 若存在 $x \in (0, +\infty)$, 使得不等式 $f\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \geq f\left[m\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4\right]$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

22. (满分 12 分) 设函数的定义域为 D , 如果存在 $[a, b] \subseteq D$, 使得 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域也为 $[a, b]$,

则称 $f(x)$ 为 “A 佳” 函数. 已知幂函数 $f(x) = (p^2 + p - 1)x^{\frac{1}{p-1}}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增函数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) $g(x) = f(x) - \frac{2}{9}$ 是否为 “A 佳” 函数. 若是, 请指出所在区间; 若不是, 请说明理由.

(3) 若函数 $h(x) = n - f(x+1)$, 且 $h(x)$ 是 “A 佳” 函数, 试求出实数 n 的取值范围.