数学试题

（满分 150 分，120 分钟完成）

命题人	向波洋
审题人	李鹏贤

一、选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{1，2，3\}$，那么 A 的子集的个数是

A．3　　B．7　　C．8　　D．9

2. 命题“$\exists x_0\in R$，$x_0^2+1<0$”的否定是

A．$\forall x\in R$，$x^2+1<0$　　B．$\forall x\in R$，$x^2+1\geqslant 0$

C．$\exists x_0\in R$，$x_0^2+1\le 0$　　D．$\exists x_0\in R$，x_0^2+10

3. 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}+\dfrac{2x}{x-3}$ 的定义域为

A．$(-1,+\infty)$　　B．$(-1，3)\cup(3，+\infty)$

C．$[-1，3)\cup(3，+\infty)$　　D．$(-1,3)$

4. 设 a，b 为实数，则“$a-b>0$”是“$a^2-b^2>0$”的

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

5. 已知函数 $f(\mathrm{x})=\begin{cases}x^2-2x+2,x>0\\-x+a,x\le 0\end{cases}$ 的值域为 $[1,+\infty)$，则 a 的最小值为

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x-4}}$ 的单调递减区间为

A．$(-\infty,-\dfrac{3}{2})$　　B．$(-\infty,-1)$　　C．$(\dfrac{3}{2},+\infty)$　　D．$(4,+\infty)$

已知 $g(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，且对任意的正数 $a\neq b$，有 $\dfrac{g(a)-g(b)}{a-b}<0$，且 $f(x)=g(x)+2$，若 $f(m)+f(m-2)>4$，则实数 m 的取值范围是

A. $(3,+\infty)$　　B. $(-\infty,3)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)$

8. 函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+bx+c}$ 的定义域为 D，对于 D 内的任意 x 都有 $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f$（1）成立，则 $b\cdot c+f$（3）的值为

A. 6　　B. 0

C. 5　　D. 以上答案均不正确

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．

9. 列各组函数中，两个函数是同一函数的有

A. $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$　　B. $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

C. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 与 $g(x)=\begin{cases}1,x>0\\-1,x<0\end{cases}$　　D. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ 与 $g(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$

10. 已知函数 $f(x)=|x|-x^2$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$　　B. $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上是增函数

C. $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,1)$　　D. $f(x)+2x\geqslant0$ 的解集为 $[0，3]$

11. 已知实数 a，b 满足 $a^2-ab+b=0(a>1)$，下列结论中正确的是

A. $b\geqslant4$　　B. $2a+b\geqslant8$　　C. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>1$　　D. $a+\dfrac{a}{b}>1$

12. 狄利克雷函数是高等数学中的一个典型函数，若 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\0, & x\in C_RQ\end{cases}$，则称 $f(x)$ 为狄利克雷函数．对于狄利克雷函数 $f(x)$，给出下面 4 个命题：其中真命题的有

A. 对任意 $x\in R$，都有 $f[f(x)]=1$

B. 对任意 $x\in R$，都有 $f(-x)+f(x)=0$

C. 对任意 $x_1\in R$，都存在 $x_2\in Q$，$f(x_1+x_2)=f(x_1)$

D. 若 $a<0$，$b>1$，则有 $\{x\,|\,f(x)>a\}=\{x\,|\,f(x)<b\}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 满足集合满足集合 $\{1,2\}\subsetneqq M\subsetneqq\{1,2,3.4.5\}$ 的集合 M 的个数是____.

14．设函数 $f(x)$ 是定义域为 R 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x(1-x)$，求 $x<0$ 时，$f(x)$ 的解析式为____.

15. 若命题“$\exists x\in R$，使得 $ax^2+2ax-1\geqslant 0$”为假命题，则实数 a 的取值范围是 ____.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+ax, x\leqslant 1\\ 2ax-5, x>1\end{cases}$，若存在 x_1，$x_2\in R$ 且 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$ 成立，则实数 a 的取值范围是____.

四．解答题：共 70 分．第 17 题 10 分，其余各题 12 分。解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．

17. （10 分）

已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m-1\leqslant x\leqslant 2m+3\}$.

（1）若 $m=4$，求 $A\cup B$；

（2）若 $A\cap B=B$，求实数 m 的取值范围.

18. （12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的函数.

（1）用定义法证明函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数；

（2）解不等式 $f(x-1)+f(x)<0$.

19. （12 分）

已知函数 $f(x)=-x^2+(a+1)x(a\in R)$.

（1）若对于任意 $x\in[1，2]$，恒有 $f(x)\geqslant 2x^2$ 成立，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $a\geqslant 2$，求函数 $f(x)$ 在区间 $[0，2]$ 上的最大值 g（a).

20. （12分）

已知函数 $f(x)=x^2-2(a+1)x+4a$.

（1）解关于 x 的不等式 $f(x)<0$ ；

（2）函数 $g(x)=(a+4)x+a^2-a+5$ ， x_1 ， x_2 为方程 $f(x)+g(x)=0$ 的两个实根，求 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值.

21. （12分）

为了加强“平安校园”建设，有效遏制涉校案件的发生，保障师生安全，某校决定在学校门口利用一侧原有墙体，建造一间墙高为3米，底面为24平方米，且背面靠墙的长方体形状的校园警务室．由于此警务室的后背靠墙，无需建造费用，甲工程队给出的报价为：屋子前面新建墙体的报价为每平方米400元，左右两面新建墙体报价为每平方米300元，屋顶和地面以及其他报价共计14400元．设屋子的左右两面墙的长度均为 x 米 $(3\leqslant x\leqslant 6)$.

（1）解左右两面墙的长度为多少时，甲工程队报价最低？并求出最低报价.

（2）现有乙工程队也要参与此警务室的建造竞标，其给出的整体报价为 $\dfrac{1800a(1+x)}{x}$ 元 $(a>0)$ ，若无论左右两面墙的长度为多少米，乙工程队都能竞标成功，试求 a 的取值范围.

22. （12分）

已知函数 $f(x)=x|x-2m|$ ， $m\in R$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性（只要求写出正确结论）

（2）若函数 $F(x)=f(x)+4m^2$ 在 $[2，4]$ 上的最小值为12，求实数 m 的值.