

重庆外国语学校 2021-2022 学年度 (上)

高 2024 届 · 半期考试数学试卷

(满分 150 分, 120 分钟完成)

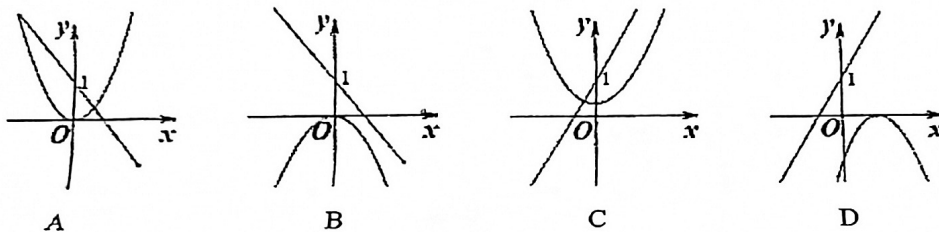
第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、单项选择题: 本题共 8 小题. 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求. 请将答案填写在答题卡相应的位置上.

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | -x^2 + x + 2 > 0\}$, 则集合 A 的真子集个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

2. 函数 $y = -ax + 1$ 与 $y = ax^2$ 在同一坐标系中的图象大致是图中的 ()



3. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 3\}$, 则不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集为 ()

- A. $\{x | -3 < x < -1\}$ B. $\{x | \frac{1}{3} < x < 1\}$ C. $\{x | x < \frac{1}{3} \text{ 或 } x > 1\}$ D. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > -1\}$

4. 已知幂函数 $f(x) = x^{-m^2+2m+3}$ ($m \in \mathbb{Z}$) 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调增函数, 且 $y = f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 则 m 的值为 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

5. 若偶函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 则满足 $f(2x-1) < f(x+1)$ 的 x 取值范围是 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(0, 2)$ C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$ D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

6. 对任意实数 a, b, c , 给出下列命题, 其中真命题是 ().

- A. “ $a=b$ ” 是 “ $ac=bc$ ” 的充要条件 B. “ $a>b$ ” 是 “ $a^2>b^2$ ” 的充分条件
C. “ $a<5$ ” 是 “ $a<3$ ” 的必要条件 D. “ $a+5$ 是无理数” 是 “ a 是无理数” 的充分不必要条件

7. 已知 $f(x) = -x^2 + 2ax + 3$ 与函数 $g(x) = |x - 3a|$ 在区间 $[1, 2]$ 上都是减函数, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{2}{3}, 1]$ B. $[1, +\infty) \cup (-\infty, \frac{2}{3}]$ C. $(\frac{2}{3}, 1)$ D. $[1, +\infty) \cup (-\infty, \frac{2}{3})$

8. 已知关于 x 的不等式 $\frac{1}{a}x^2+bx+c<0$ ($ab>1$) 的解集为空集, 则 $T=\frac{1}{2(ab-1)}+\frac{a(b+2c)}{ab-1}$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. 4

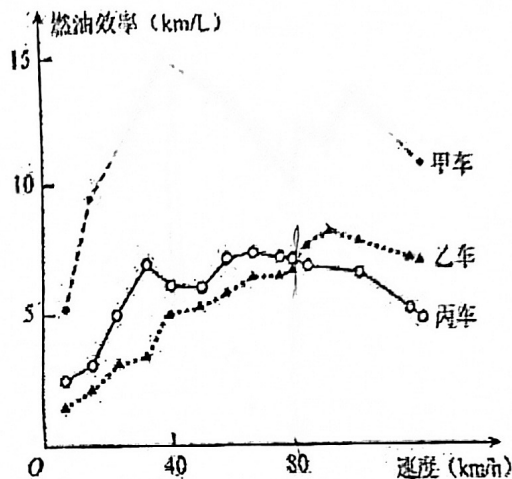
二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错得 0 分. 请将答案填写在答题卡相应位置.

9. 下列各组函数是同一函数的是 ()

- A. $f(x)=x^2-2x-1$ 与 $g(s)=s^2-2s-1$ B. $f(x)=\sqrt{x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt{x}$
C. $f(x)=\frac{x}{x}$ 与 $g(x)=\frac{1}{x^0}$ D. $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

10. 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里
程, 下图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效
率情况. 下列叙述中错误的是 ()

- A. 消耗 1 升汽油, 乙车最多可行驶 5 千米
B. 以相同速度行驶相同路程, 三辆车中, 甲车消耗汽油最多
C. 甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时, 消耗 10 升汽油
D. 某城市机动车最高限速 80 千米/小时. 相同条件下, 在该
市用丙车比用乙车更省油

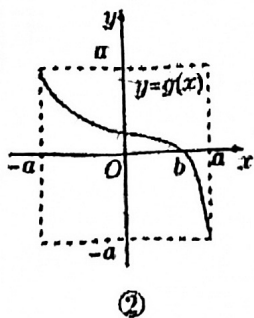
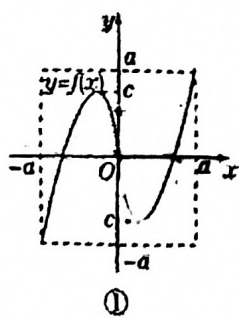


11. 若正实数 a, b 满足 $a+b=1$, 则下列说法正确的是 ()

- A. ab 有最大值 $\frac{1}{4}$ B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 有最小值 2 D. a^2+b^2 有最大值 $\frac{1}{2}$

12. 定义域和值域均为 $[-a, a]$ 的函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象如图所示, 其中 $a>c>b>0$, 给出下列

四个结论正确结论的是 ()



- A. 方程 $f[g(x)]=0$ 有且仅有三个 B. 方程 $g[f(x)]=0$ 有且仅有一个解
C. 方程 $f[f(x)]=0$ 有且仅有一个解 D. 方程 $g[g(x)]=0$ 有且仅有一个解

第 II 卷（非选择题 共 90 分）

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。请将答案填写在答题卡相应的位置上。

13. 若 $2 \in \{1, a, a^2 - 2\}$ ，则 $a =$ _____.

14. 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 的单调递增区间为_____.

15. 若关于 x 的不等式 $x^2 - 4x - 2 - a \geq 0$ 在 $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$ 内有解，则实数 a 的取值范围是_____.

16. 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0, f(x) + f(1-x) = 1, f(\frac{x}{5}) = \frac{1}{2}f(x)$ ，且当 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ 时，

$f(x_1) \leq f(x_2)$ ，则 $f(\frac{1}{2020})$ 等于_____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。其中，17 题 10 分，18, 19, 20, 21, 22 各 12 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。请将答案填写在答题卡相应的位置上。

17. 已知集合 $A = \{x | x > a - 1\}$ ， $B = \{x | \frac{x-1}{x+3} > 0\}$ 。

(1) 若 $a = 1$ ，求 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B)$ ；

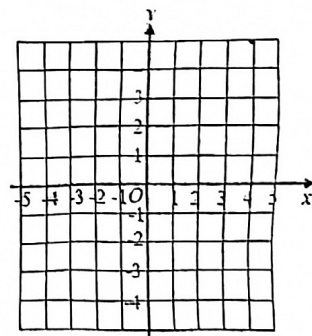
(2) 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围。

18. 已知函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}$

(1) 在给定的直角坐标系内作出函数 $f(x)$ 的图象（不用列表）；

(2) 由图象写出函数 $f(x)$ 的单调区间，并指出单调性

(3) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时，判断 $f(x)$ 的单调性并进行证明；



19. 已知定义在 \mathbb{R} 上的单调递增函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = \sqrt{x} + 1$ 。

(1) 求 $f(0)$ 的值及 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $f(kx^2 - 1) + f(2x - 3x^2) < 0$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，求实数 k 的取值范围

20. 新型冠状病毒感染的肺炎治疗过程中, 需要某医药公司生产的某种药品. 此药品的年固定成本为250万

元, 每生产 x 千件需另投入成本为 $C(x)$. 当年产量不足80千件时, $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 10x$ (万元). 当年

产量不小于80千件时, $C(x) = 51x + \frac{10000}{x} - 1450$ (万元). 每件商品售价为0.05万元, 在疫情期间,

该公司生产的药品能全部售完.

(1) 写出年利润 $L(x)$ (万元) 关于年产量 x (千件) 的函数解析式;

(2) 该公司决定将此药品所获利润的1%用来捐赠防疫物资. 当年产量为多少千件时, 在这一药品的生产中所获利润最大? 此时可捐赠多少万元的物资款?

21. 已知函数 $f(x)$ 满足: $2f(x) + f(-x) = 3x^2 + 2x + 6$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $g(x) = f(x) + |2x - a|$, 且 $g(x)$ 的最小值为3, 求实数 a 的值.

22. 函数 $y = f(x)$ 的定义域 $D = \{x | x \in \mathbb{R}, \text{ 且 } x \neq 0\}$, 对定义域 D 内任意两个实数 x_1, x_2 , 都有

$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 x_2)$ 成立.

(1) 求 $f(-1)$ 的值并证明 $y = f(x)$ 为偶函数;

(2) 若 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$, 解关于 x 的不等式 $f(x-3) \geq 0$.

(3) 若 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$, 且不等式 $f(2x^2 - 3x + 3) \leq f(x^2 - 2x + 2) + f(a)$ 对任意实数 x 恒成立, 求非零实数 a 的取值范围.