重庆外国语学校高 2020-2021 学年度（下）

高 2023 届 3 月考试

数学试题答案

一、单项选择题：

B A D B C C A C

二、多项选择题：

ABCD ADC ABD ACD

三、填空题：

$-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\sqrt{3}$ $\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$

四、解答题

17.【答案】(1) $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $k=\frac{1}{2}$.

【解析】(1)∵a=(2，0)，b=(1，4)，

$\therefore \vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$=a+2b=(2，0)+(2，8)=(4，8)．模长$4\sqrt{5}$，$\cos\theta=\frac{8}{2\times4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(2)依题意，知 ka+b=(2k，0)+(1，4)=(2k+1，4)，a+2b=(2，0)+(2，8)=(4，8).

∵向量 ka+b 与 a+2b 平行，∴8(2k+1)−4×4=0，∴$k=\frac{1}{2}$.

18.【答案】(1) $\cos A=\frac{3}{4}$ (2) $r=\frac{15\sqrt{7}}{2}$

【解析】(1) 设三边： $x-1,x,x+1$，所以：$\frac{x-1}{\sin A}=\frac{x+1}{\sin 2A}=\frac{x+1}{2\sin A\cos A}$，

$\cos A=\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{x^2+(x+1)^2-(x-1)^2}{2x(x+1)}\Rightarrow x=5$，三边为：4，5，6，所以$\cos A=\frac{3}{4}$

(2) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times5\times6\times\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(4+5+6)r=\frac{15\sqrt{7}}{4}$，$r=\frac{15\sqrt{7}}{2}$

19.【答案】(1) $A=\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{27}{7}$

【解析】(1) Q $b\tan A=(2c-b)\tan B$，$\therefore$ 由正弦定理，得 $\sin B\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}=(2\sin C-\sin B)\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}$，

又Q 在 ΔABC 中， $\sin B\neq 0$， $\therefore \sin A\cos B=2\sin C\cos A-\cos A\sin B$，

即 $\sin(A+B)=2\sin C\cos A$，

又Q $\sin(A+B)=\sin C\neq 0$，$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$，

又Q $0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) 由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， $b=2$，$c=3$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore a=\sqrt{7}$.

$\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$，即 $\sqrt{7}\cdot AD=3\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AD=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAD=|\overrightarrow{AD}|^2=\dfrac{27}{7}$.

20.【答案】(1) $-\sqrt{3}$ (2) 值域为 $[\dfrac{1}{2},1]$

【解析】(1) $\vec{a}-\vec{b}=(0,\sqrt{3}\sin x-\cos x)$，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2=1$ 则 $\tan x=\sqrt{3},\tan 2x=-\sqrt{3}$

$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{1}{2}=\cos(\omega x)\cos(\omega x)+\sqrt{3}\sin(\omega x)\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{2})-\dfrac{1}{2}=\cos^2(\omega x)+\sqrt{3}\sin(\omega x)\cos(\omega x)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1+\cos(2\omega x)}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\omega x)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cos(2\omega x)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\omega x)$

$=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos(2\omega x)+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin(2\omega x)=\sin(2\omega x+\dfrac{\pi}{6})$

$T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\dfrac{\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore \omega=1$ ……………………………………………………6 分

(2) $x\in[0,\dfrac{\pi}{3}]$ 时，$\dfrac{\pi}{6}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{5\pi}{6}$，$\therefore \dfrac{1}{2}\le\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})\le 1$，$\therefore \dfrac{1}{2}\le f(x)\le 1$

$f(x)$ 在 $x\in[0,\dfrac{\pi}{3}]$ 的 值域为 $[\dfrac{1}{2},1]$ ……………………………………………12 分

21.解：(I) 在 ΔAOB 中， $OA=3,OB=3\sqrt{3},\angle AOB=90^\circ$

$\therefore \angle OAB=60^\circ$，……………………………………2 分

由余弦定理得：$OM^2=AO^2+AM^2-2AO\times AM\cos A=7$，

$\therefore OM=\sqrt{7}$， ……………………………………5 分

（Ⅱ）$\angle AOM=\theta, 0^\circ<\theta<60^\circ$ ，

在$\triangle OAM$中，由$\dfrac{OM}{\sin\angle OAB}=\dfrac{OA}{\sin\angle OMA}$，得$OM=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin(\theta+60^\circ)}$，

在$\triangle OAN$中，由$\dfrac{ON}{\sin\angle OAB}=\dfrac{OA}{\sin\angle ONA}$，得$ON=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin(\theta+90^\circ)}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cos\theta}$，……8 分

$$\therefore S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}OM\cdot ON\sin\angle MON=\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2\sin(\theta+60^\circ)}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\cos\theta}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{27}{16\sin(\theta+60^\circ)\cos\theta}=\frac{27}{8\sin\theta\cos\theta+8\sqrt{3}\cos^2\theta}$$

$$=\frac{27}{4\sin2\theta+4\sqrt{3}\cos2\theta+4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{27}{8\sin(2\theta+60^\circ)+4\sqrt{3}},0<\theta<60^\circ.$$ ……………………11 分

当$2\theta+60^\circ=90^\circ$，即$\theta=15^\circ$时，$\dfrac{27}{8\sin(2\theta+60^\circ)+4\sqrt{3}}$取最小值.

$\therefore$应设计$\angle AOM=15^\circ$，可使$\triangle OMN$的面积最小. ………………12 分

22.【答案】（1）$\dfrac{8}{9}$　（2）$\dfrac{2\sqrt{13}}{9}$

【解析】

（1）因为$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$

所以$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}=-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$.

$\overrightarrow{BF}=-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$，而$\overrightarrow{BD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$

而$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{BD}=\mu\overrightarrow{BF}\Rightarrow\overrightarrow{BE}=-\lambda\vec{a}+\dfrac{2}{3}(1-\lambda)\vec{b}=\mu\left(-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}\right)$

因为 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 不共线，由平面向量基本定理得 $\begin{cases}-\lambda=-\dfrac{3}{4}\mu \\ \dfrac{2}{3}(1-\lambda)=\dfrac{\mu}{4}\end{cases}$

解得 $\mu=\dfrac{8}{9}$ 所以 $\overrightarrow{BE}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}$，$\mu=\dfrac{8}{9}$，

（2）$\triangle ABC$ 中，$\left(c^2+b^2-a^2\right)\cdot\left(c\cos B+b\cos C\right)=abc$，

由余弦定理可得：$2cb\cos A\left(c\cos B+b\cos C\right)=abc$，

$\therefore 2\cos A\left(\sin C\cos B+\sin B\cos C\right)=\sin A$，$\therefore 2\cos A\sin\left(C+B\right)=\sin A$，$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$，

又 $\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$，$B=\dfrac{2\pi}{3}-C$；$\therefore$ 由正弦定理 $\dfrac{c}{\sin c}=\dfrac{b}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)}=\dfrac{a}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，又 $\because c+b=2$，

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A+\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-A\right)}=\dfrac{1}{\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)}$，$\because C\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，$C+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，$\left|\overrightarrow{BD}\right|$ 最小值时 a=1

$(\overrightarrow{BE})^2=(-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b})^2, \left|\overrightarrow{BE}\right|=\dfrac{2\sqrt{13}}{9}$