

# 西南大学附属中学校高 2022 届第二次月考

## 数 学 试 题

(满分: 150 分 考试时间: 120 分钟)

2021 年 10 月

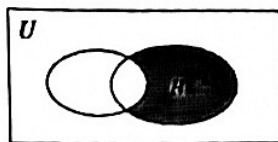
注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔填涂; 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米黑色签字笔书写; 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持答卷清洁、完整。
3. 考试结束后, 将答题卡交回 (试题卷学生留存, 以备评讲)。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求.

1. 如图, 设全集  $U = N$ , 集合  $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 则图中阴影部分表示的集合为 ( )

- A.  $\{2, 4\}$                       B.  $\{7, 8\}$   
C.  $\{1, 3, 5\}$                       D.  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$



2. 已知  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ , 则  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$  的值是 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D. 1

3. 若已知直线  $l: y = x + b$  与圆  $C: x^2 + y^2 = 1$  交于  $A, B$  两点, 则 “ $b = 1$ ” 是 “弦  $AB$  所对圆心角为  $\frac{\pi}{2}$ ” 的 ( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

4. 命题 “ $\exists x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 3$  且  $\sin x \geq 1$ ” 的否定是 ( )

- A.  $\forall x \leq 0, x + \frac{1}{x} < 3$  且  $\sin x < 1$                       B.  $\exists x > 0, x + \frac{1}{x} < 3$  或  $\sin x < 1$   
C.  $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} < 3$  且  $\sin x < 1$                       D.  $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} < 3$  或  $\sin x < 1$

5. 将  $A, B, C, D, E$  排成一列, 要求  $A, C, E$  在排列中顺序为 “ $A, C, E$ ” 或 “ $E, C, A$ ” (可以不相邻), 则这样的排列数有 ( )

- A. 24 种                      B. 40 种                      C. 60 种                      D. 80 种

在 $\triangle ABC$ 中,  $M$ 为边 $BC$ 上任意一点,  $N$ 为 $AM$ 中点, 且满足 $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ , 则 $\lambda^2 + \mu^2$ 的最小值为 ( )

- A.  $\frac{1}{16}$       B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{1}{8}$       D. 1

7. 已知 $a \in [0, 1]$ , 则函数 $f(x) = \sin x - a, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 有两个零点的概率为 ( )

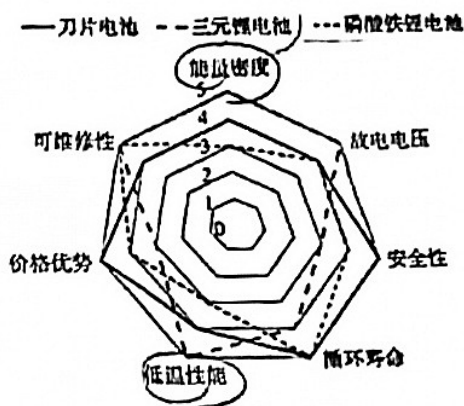
- A.  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知 $a = 2^{\frac{3}{4}}, b = 3^{\frac{1}{2}}, c = \log_3 4, d = \log_4 5$ , 则 $a, b, c, d$ 的大小关系为 ( )

- A.  $b > a > d > c$       B.  $b > c > a > d$       C.  $b > a > c > d$       D.  $a > b > d > c$

二、多选题: 本大题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 动力电池组对新能源汽车的性能表现以及安全性影响巨大, 是新能源汽车非常核心的部件. 如图是刀片电池、三元锂电池和磷酸铁锂电池部分指标的雷达图, 则下列说法正确的是 ( )



A. 刀片电池的安全性更高, 价格优势更突出

B. 三元锂电池的缺点是循环寿命较短、价格偏高、安全性偏低

C. 对于这7项指标, 刀片电池的平均得分低于三元锂电池

D. 磷酸铁锂电池能量密度低、低温性能好

10. 若 $(1-2x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ , 则下列结论中正确的是 ( )

A.  $a_0 = 1$

B.  $a_5 = -32$

C.  $|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| = 3^5$

D.  $a_0 + a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = -10$

11. 已知曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$  (其中 $m, n$ 为参数) ( )

A. 若 $m > n > 0$ , 则 $C$ 是椭圆, 其长轴长为 $2\sqrt{\frac{1}{m}}$

B. 若 $mn < 0$ , 则 $C$ 是双曲线, 其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$

C. 曲线 $C$ 可表示的所有曲线类型为椭圆、圆、双曲线

D. 若 $mn < 0, m+n > 0$ , 则曲线 $C$ 的离心率 $e$ 的取值范围为 $(\sqrt{2}, +\infty)$

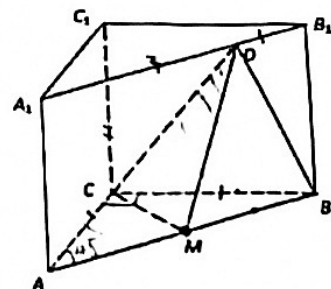
12. 已知边长为  $a$  的菱形  $ABCD$  中,  $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$ , 将  $\triangle ADC$  沿  $AC$  翻折, 下列说法正确的是 ( )
- A. 在翻折的过程中, 直线  $AD, BC$  可能相互垂直
- B. 在翻折的过程中, 三棱锥  $D-ABC$  体积最大值为
- C. 在翻折的过程中, 三棱锥  $D-ABC$  表面积最大时, 其内切球表面积为  $(14-8\sqrt{3})\pi a^2$
- D. 在翻折的过程中, 点  $D$  在面  $ABC$  上的投影为  $D'$ ,  $E$  为棱  $CD$  上的一个动点,  $ED'$  的最小值为  $\frac{\sqrt{3}}{4}a$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每题 5 分, 共 20 分.

13.  $i$  是虚数单位, 已知复数  $z = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4$ , 则  $|z| =$  \_\_\_\_\_
14. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $a_1 = 1, S_n = a_{n+1}$ , 则数列的通项公式  $a_n =$  \_\_\_\_\_
15. 函数  $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$  的单调增区间为 \_\_\_\_\_; 若对  $\forall a, b \in [1, e]$ , 均有  $\frac{a \ln b - b \ln a}{b - a} < m$  成立, 则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
- 已知  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的左、右焦点, 过  $F_2$  的直线与双曲线的右支交于  $A, B$  两点, 记  $\triangle AF_1F_2$  的内切圆  $O_1$  的半径为  $r_1$ ,  $\triangle BF_1F_2$  的内切圆  $O_2$  的半径为  $r_2$ , 圆  $O_1, O_2$  的面积为  $S_1, S_2$ , 则  $S_1 + S_2$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

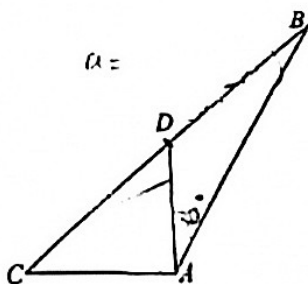
四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 如图, 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = BC = CC_1$ ,  $M$  为  $AB$  的中点,  $D$  在  $A_1B_1$  上且  $A_1D = 3DB_1$ .



- (1) 求证: 平面  $CMD \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ;
- (2) 求直线  $CM$  与平面  $CBD$  所成角的正弦值.

18. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对应边分别为  $a, b, c$ ,  $a = 2\sqrt{7}$ ,  $b = 2$ ,  $\sqrt{3} \cos A (c \cos B + b \cos C) + a \sin A = 0$ .



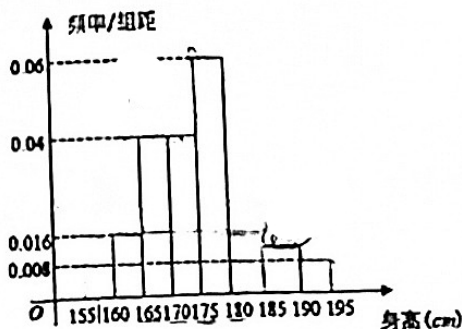
- (1) 求  $A$ ;
- (2) 设  $D$  为  $BC$  边上一点, 且  $AD \perp AC$ , 求  $\triangle ABD$  的面积.

19. 从某学校的 800 名男生中随机抽取 50 名测量身高, 被测学生身高全部介于 155cm 和 195cm 之间, 将测量结果按如下方式分成八组: 第一组  $[155, 160)$ , 第二组  $[160, 165)$ , ..., 第八组  $[190, 195]$ , 下图是按上述分组方法得到的频率分布直方图的一部分, 已知第一组与第八组人数相同, 第六组的人数为 4 人.

(1) 求第七组的频率;

(2) 估计该校的 800 名男生的身高的平均数和中位数;

(3) 若从身高属于第六组和第八组的所有男生中随机抽取两名男生, 记他们的身高分别为  $x, y$ , 事件  $E = \{|x - y| \leq 5\}$ , 求  $P(E)$ .



20. 已知函数  $f(x) = \ln x + ax^2 - x + b$ .

(1) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $P(1, f(1))$  处的切线为  $y = x + 2$ , 求  $a, b$  的值;

(2) 若  $a \in \mathbb{R}$ , 讨论函数  $y = f(x)$  的单调区间.

21. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} a_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

(1) 证明数列  $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$  为等比数列, 并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = n(2 - S_n)$ , 求数列  $\left\{\frac{3n-2}{b_n}\right\}$  前  $n$  项和  $T_n$ .

22. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 点  $A(0, -1)$  是椭圆  $E$  短轴的一个四等分点.

(1) 求椭圆  $E$  的标准方程;

(2) 设过点  $A$  且斜率为  $k_1$  的动直线与椭圆  $E$  交于  $M, N$  两点, 且点  $B(0, 2)$ , 直线  $BM, BN$  分别交  $\odot C: x^2 + (y-1)^2 = 1$  于异于点  $B$  的点  $P, Q$ , 设直线  $PQ$  的斜率为  $k_2$ , 求实数  $\lambda$  使得  $k_2 = \lambda k_1$  恒成立.

(命题人: 王相成 审题人: 王乙橙)