数　　学

命题人:曾克平　李智敏　周煌
审题:高三数学备课组

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共8页.时量120分钟.满分150分.

得分:____________

第Ⅰ卷

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

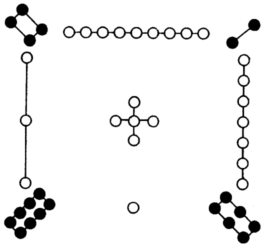
1.已知集合$A=\{x|y=\sqrt{\log_{0.5}(2x-1)}\}$,集合$B=\{x|\sqrt[3]{4}-2^x\geqslant 0\}$,则$A\cap B$等于

A. $(-\infty,1]$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $\left[\frac{2}{3},1\right]$

2.已知复数z的共轭复数为$\overline{z}$,若$z\mathrm{i}=2\overline{z}+\mathrm{i}$(i为虚数单位),则复数$z$的虚部为

A. $-\frac{1}{3}\mathrm{i}$　　B. $\frac{2}{3}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

3.如图,洛书(古称龟书)是阴阳五行术数之源,在古代传说中有神龟出于洛水,其甲壳上有此图象,结构是戴九履一,左三右七,二四为肩,六八为足,以五居中,五方白圈皆阳数,四角黑点为阴数.若从四个阴数和五个阳数中随机选取3个数,则选取的3个数之和为奇数的方法数为

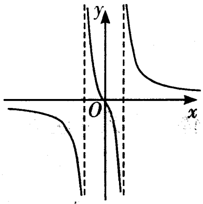


A. 30　　B. 40　　C. 42　　D. 44

4.已知在△ABC中,$AB=4$,$BC=6$,O是△ABC的外心,则$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AC}$的值为

A. 8　　B. 10　　C. 12　　D. 16

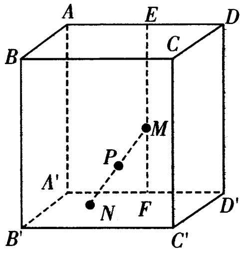
5. 我国著名数学家华罗庚曾说:“数缺形时少直观,形少数时难入微,数形结合百般好,隔离分家万事休.”在数学的学习和研究中,有时可凭借函数的图象分析函数解析式的特征. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示,则函数 $f(x)$ 的解析式可能为



A. $f(x)=\dfrac{2x}{1-|x|}$　　B. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

C. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$　　D. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

6. 如图,在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,E、F 分别是 AD、$A'D'$ 的中点,长为 2 的线段 MN 的一个端点 M 在线段 EF 上运动,另一个端点 N 在底面 $A'B'C'D'$ 上运动,则线段 MN 的中点 P 的轨迹(曲面)与正方体(各个面)所围成的几何体的体积为



A. $\dfrac{4\pi}{3}$　　B. $\dfrac{2\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

7. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足:(1) $f(x)>0$;(2) $f(x)<f'(x)<2f(x)$(其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数),则 $\dfrac{f(1)}{f(2)}$ 的取值范围为

A. $\left(\dfrac{2}{2e^2},\dfrac{1}{e}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{e}\right)$　　C. $(e,2e)$　　D. (e,e^3)

8. 祖暅原理也称祖氏原理,是我国数学家祖暅提出的一个求积的著名命题:“幂势既同,则积不容异”,“幂”是截面积,“势”是几何体的高,意思是两个同高的立体,如在等高处截面积相等,则体积相等. 满足 $x^2+y^2\leqslant 16$ 的点 (x,y) 组成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_1,由曲线 $x^2-y^2=16$,$y=\pm x$,$y=\pm 4$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_2,则 V_1、V_2 满足以下哪个关系式

A. $V_1=\dfrac{1}{2}V_2$　　B. $V_1=\dfrac{2}{3}V_2$　　C. $V_1=2V_2$　　D. $V_1=V_2$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 $\overline{x}$，方差为 s_x^2，数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的平均数为 $\overline{y}$，方差为 s_y^2，若 b 为不等于 0 的常数，$y_1=x_1+b$，$y_2=x_2+b$，$\cdots$，$y_n=x_n+b$，则下列说法正确的是

A. $\overline{y}=\overline{x}$　　B. $\overline{y}=\overline{x}+b$

C. $s_y^2=s_x^2$　　D. $s_y^2=s_x^2+b^2$

10. 下列说法正确的是

A. 存在实数 x，使 $\sin x+\cos x=2$

B. “α,β 是锐角△ABC 的内角”是“$\sin\alpha>\cos\beta$”的充分不必要条件

C. 函数 $y=\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{7\pi}{2}\right)$ 是偶函数

D. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象

11. 设 F_1,F_2 同时为椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与双曲线 $C_2:\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>0,b_1>0)$ 的左右焦点，设椭圆 C_1 与双曲线 C_2 在第一象限内交于点 M，椭圆 C_1 与双曲线 C_2 的离心率分别为 e_1,e_2，O 为坐标原点，则下列结论正确的是

A. 若 $|F_1F_2|=2|MO|$，则 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=\sqrt{2}$

B. 若 $|F_1F_2|=2|MO|$，则 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=2$

C. 若 $|F_1F_2|=4|MF_2|$，则 e_1e_2 的取值范围是 $\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$

D. 若 $|F_1F_2|=4|MF_2|$，则 e_1e_2 的取值范围是 $\left(\frac{2}{3},2\right)$

12. 设 P 为多面体 M 的一个顶点，定义多面体 M 在点 P 处的离散曲率为 $1-\frac{1}{2\pi}(\angle Q_1PQ_2+\angle Q_2PQ_3+\cdots+\angle Q_{k-1}PQ_k+\angle Q_kPQ_1)$，其中 $Q_i(i=1,2,\cdots,k,k\geqslant 3)$ 为多面体 M 的所有与点 P 相邻的顶点，且平面 Q_1PQ_2，平面 Q_2PQ_3，$\cdots$，平面 $Q_{k-1}PQ_k$ 和平面 Q_kPQ_1 为多面体 M 的所有以 P 为公共点的面. 已知在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$AA_1=AB$，则下列结论正确的是

A. 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在其各顶点处的离散曲率都相等

B. 若 $AC=BD$，则直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在顶点 A 处的离散曲率为 $\frac{1}{4}$

C. 若 $AB=BD$，则直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在顶点 A 处的离散曲率为 $\frac{2}{3}$

D. 若四面体 A_1ABD 在点 A_1 处的离散曲率为 $\frac{7}{12}$，则 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

第Ⅱ卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13\. 已知二项式$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）的展开式中只有第 6 项的系数最大，则其常数项为__________.

14\. 设 $m,n\in\mathbf{R}$，若直线 $l:mx+ny-1=0$ 与 x 轴相交于点 A，与 y 轴相交于点 B，且 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交所得弦的长为 2，O 为坐标原点，则$\triangle AOB$ 面积的最小值为__________.

15\. 等比数列$\{a_n\}$的公比 $0<q<1$，$a_{17}^2=a_{24}$，则使 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$成立的正整数 n 的最大值为__________.

16\. 已知函数 $f(x)=\frac{e^{|x-1|}-\sin(x-1)}{e^{|x-1|}}$，若 $f(-2019)+f(-2018)+\cdots+f(2021)=2020(a^2+b^2)+1$，$a,b\in\mathbf{R}$. 则$\left|a-b+2\sqrt{2}\right|$的最大值为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17\. （本小题满分 10 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=3a_n+2n+1$，且 $a_1=1$.

(1)若 $b_n=a_n+n+1$，证明：数列$\{b_n\}$是等比数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分12分）

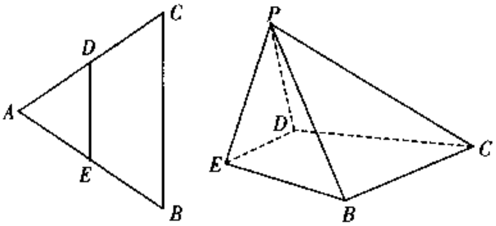
在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$\boldsymbol{m}=(\sin A+\sin B-\sin C,\sin A)$，$\boldsymbol{n}=(c,b+c-a)$，$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，且$b=2$.

(1)求角B的大小；

(2)在①$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$成等差数列，②$a,b,c$成等差数列，③$a^2,b^2,c^2$成等差数列，这三个条件中任选一个作为已知条件，求$\triangle ABC$的面积$S$.（如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分）

19.（本小题满分 12 分）

如图，已知$\triangle ABC$为等边三角形，D，E分别为AC，AB边的中点，把$\triangle ADE$沿DE折起，使点A到达点P，平面$PDE\perp$平面$BCDE$，若$BC=4$.



(1)求PB与平面$BCDE$所成角的正弦值；

(2)求直线DE到平面PBC的距离.

20.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系xOy中，已知$F(1,0)$，动点P到直线$x=6$的距离等于$2|PF|+2$. 动点P的轨迹记为曲线C.

(1)求曲线C的方程；

(2)已知$A(2,0)$，过点F的动直线l与曲线C交于B，D两点，记$\triangle AOB$和$\triangle AOD$的面积分别为S_1和S_2，求S_1+S_2的最大值.

21.(本小题满分 12 分)

新冠病毒疫苗生产单位通过验血方法检验某种疫苗产生抗体情况，需要检验血液是否有抗体，现有 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 份血液样本，每份样本取到的可能性均等，有以下两种检验方式：①逐份检验，则需要检验 n 次；②混合检验，将其中 $k(k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geqslant 2)$ 份血液样本分别取样混合在一起检验，若检验结果无抗体，则这 k 份的血液全无抗体，因而这 k 份血液样本只需检验一次就够了，若检验结果有抗体，为了明确这 k 份血液究竟哪几份有抗体，就要对这 k 份再逐份检验，此时这 k 份血液的检验总次数为 $k+1$ 次，假设在接受检验的血液样本中，每份样本的检验结果有无抗体都是相互独立的，且每份样本有抗体的概率均为 $p(0<p<1)$.

(1)假设有 5 份血液样本，其中只有 2 份血液样本有抗体，若采用逐份检验方式，求恰好经过 3 次检验就能把有抗体的血液样本全部检验出来的概率；

(2)现取其中 $k(k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geqslant 2)$ 份血液样本，记采用逐份检验方式，样本需要检验的总次数为 ξ_1，采用混合检验方式，样本需要检验的总次数为 ξ_2. 若 $E(\xi_1)=E(\xi_2)$，求 p 关于 k 的函数关系式 $p=f(k)$，并证明 $p<1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^2\ln x-ax+1$.

(1)若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

(2)若函数 $y=f(x)-ax^3+ax-1$ 的两个零点为 x_1,x_2,证明:$x_1x_2>e^2$.