西南大学附属中学校高 2023 届第三次月考

数学试题

（命题人：郑莹莹　钟泱　审题人：郭鹏杰）

（满分：150 分；考试时间：120 分钟）

2022 年 11 月

注意事项：

1.答题前，考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上.

2.答选择题时，必须使用 2B 铅笔填涂；答非选择题时，必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写；必须在题号对应的答题区域内作答，超出答题区域书写无效；保持答卷清洁、完整.

3.考试结束后，将答题卡交回（试题卷学生留存，以备评讲）.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\left\{x|\ x^2-3x<0\right\},B=\{1,2,3,4\}$， 则 $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B=$（　　）

A. $\{3,4\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3\}$

【答案】A

【解析】

【分析】先求出集合 A，再求出其补集，然后可求得 $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B$.

【详解】由 $x^2-3x<0$，得 $0<x<3$，

所以 $A=\left\{x\middle|0<x<3\right\}$，

所以 $\complement_{\mathrm{R}}A=\left\{x\middle|x\le 0 \text{ 或 } x\ge 3\right\}$，

因为 $B=\{1,2,3,4\}$，

所以 $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B=\{3,4\}$，

故选：A

2. 若复数 z 满足 $2\left(z+\bar{z}\right)+3\left(z-\bar{z}\right)=2+3\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

C. $2+2\mathrm{i}$　　D. $2-2\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

【分析】由复数的运算法则与复数相等的概念求解即可

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in \mathrm{R}\right)$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，

所以 $z+\overline{z}=\left(a+b\mathrm{i}\right)+\left(a-b\mathrm{i}\right)=2a$，

$z-\overline{z}=\left(a+b\mathrm{i}\right)-\left(a-b\mathrm{i}\right)=2b\mathrm{i}$，

所以 $2\left(z+\overline{z}\right)+3\left(z-\overline{z}\right)=4a+6b\mathrm{i}=2+3\mathrm{i}$，

所以 $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2},z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

故选：A

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，满足对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f\left(\dfrac{3}{2}-x\right)=f\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$，若 $f(x)$ 在区间 $(a,2a-1)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,\dfrac{5}{4}\right]$　　B. $\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right)$　　C. $\left(1,\dfrac{5}{4}\right]$　　D. $(-\infty,2]$

【答案】C

【解析】

【分析】由题知函数 $f(x)$ 图像的对称轴是直线 $x=\dfrac{3}{2}$，进而得函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$ 上单调递减，再根据单调区间求解即可.

【详解】解：由 $f\left(\dfrac{3}{2}-x\right)=f\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$，得函数 $f(x)$ 图像的对称轴是直线 $x=\dfrac{3}{2}$，

因为函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增

所以，函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$ 上单调递减，

因为 $f(x)$ 在区间 $(a,2a-1)$ 上单调递减，则 $\begin{cases}2a-1\le\dfrac{3}{2}\\ a<2a-1\end{cases}$，解得 $1<a\le\dfrac{5}{4}$.

所以，实数 a 的取值范围为 $\left(1,\dfrac{5}{4}\right]$.

故选：C.

4. 若 $1<x<y<2$，则（　　）

A. $\mathrm{e}^{x}+3y<\mathrm{e}^{y}+3x$　　B. $\mathrm{e}^{x}+3y>\mathrm{e}^{y}+3x$

C. $x^3+3y^2<y^3+3x^2$　　　　　　　　D. $x^3+3y^2>y^3+3x^2$

【答案】D

【解析】

【分析】构造函数 $f\left(t\right)=\mathrm{e}^t-3t,t\in\left(1,2\right)$ 利用单调性可判断 AB；构造函数 $g\left(t\right)=t^3-3t^2,t\in\left(1,2\right)$ 利用单调性可判断 CD

【详解】对于 AB：令 $f\left(t\right)=\mathrm{e}^t-3t,t\in\left(1,2\right)$，则 $f'\left(t\right)=\mathrm{e}^t-3,t\in\left(1,2\right)$，

由 $f'\left(t\right)>0$ 得 $\ln3<t<2$，由 $f'\left(t\right)<0$ 得 $1<t<\ln3$，

所以 $f\left(t\right)$ 在 $\left(1,\ln3\right)$ 递减，在 $\left(\ln3,2\right)$ 递增，

当 $1<x<y<\ln3$ 时，$f\left(x\right)>f\left(y\right)$，即 $\mathrm{e}^x-3x>\mathrm{e}^y-3y$，也即 $\mathrm{e}^x+3y>\mathrm{e}^y+3x$，则 A 错误；

当 $\ln3<x<y<2$ 时，$f\left(x\right)<f\left(y\right)$，即 $\mathrm{e}^x-3x<\mathrm{e}^y-3y$，也即 $\mathrm{e}^x+3y<\mathrm{e}^y+3x$，则 B 错误；

对于 CD：令 $g\left(t\right)=t^3-3t^2,t\in\left(1,2\right)$，则 $g'\left(t\right)=3t^2-6t<0$ 在 $t\in\left(1,2\right)$ 上恒成立，

所以 $g\left(t\right)=t^3-3t^2$ 在 $\left(1,2\right)$ 上递减，

又 $1<x<y<2$，

所以 $g\left(x\right)>g\left(y\right)$，即 $x^3-3x^2>y^3-3y^2$，也即 $x^3+3y^2>y^3+3x^2$，故 C 错误，D 正确；

故选：D

5. 已知 $\triangle ABC$ 中，其内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，下列结论正确的有（　　）

A. 若 $\triangle ABC$ 为等边三角形且边长为 2，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2$

B. 若满足 $(a+b-c)(a+b+c)=ab$，则 $\angle C=120°$

C. 若 $ab=c^2$，则 $C\geq\dfrac{\pi}{3}$

D. 若 $\sin^2A+\sin^2B+\cos^2C>1$，则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形

【答案】B

【解析】

【分析】A.利用平面向量的数量积定义求解判断；利用余弦定理判断 B、C； D.由正弦定理将角化边，再利用余弦定理判断.

【详解】解：对于 A：因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形且边长为 2，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times2\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=-2$，故 A 错误；

对于 B：因为 $(a+b-c)(a+b+c)=ab$，即 $a^2+b^2-c^2=-ab$，

所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$，因为 $C\in\left(0,\pi\right)$，所以 $\angle C=120°$，故 B 正确；

对于 C：因为$ab=c^2$，可得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\geq\dfrac{2ab-ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，当且仅当$a=b$时取等号，因为$C\in(0,\pi)$，所以$0<C\leq\dfrac{\pi}{3}$，故 B 错误；

对于 D：因为$\sin^2A+\sin^2B+\cos^2C>1$，即$\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C>0$，即$a^2+b^2-c^2>0$，所以$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，则角$C$为锐角，但角 A，角$B$不确定，故 D 错误；

故选：B

6. 2022 国家号召全民健身口号中提到："儿童健身，天真活泼；青年健身，朝气蓬勃."提倡学生走向操场、走进大自然、走到阳光下.为弘扬运动精神，潜江中学特地每天开展课外文体活动.学校操场可供 2000 名学生运动，每周四有踢毽子、《本草纲目》健身操两种运动可供选择，经过调查发现，凡是这周选踢毽子的，下周会有 30% 的改选健身操；而选健身操的，下周会 20% 改选踢毽子.用a_n,b_n分别表示在第n周选踢毽子的和健身操的人数，如果$b_1=1200$，且$a_n+b_n=2000$，则b_{11}为（　　）

A. 800　　B. 1000　　C. 1200　　D. 1400

【答案】C

【解析】

【分析】由已知可得$b_{n+1}=0.3a_n+0.8b_n$，推导得到$b_{n+1}-1200=0.5(b_n-1200)$，由此可得$b_n=1200$，进而得到结果.

【详解】由题意知：$b_{n+1}=0.3a_n+0.8b_n$，又$a_n+b_n=2000$，

$\therefore b_{n+1}=0.3(2000-b_n)+0.8b_n=0.5b_n+600$，即$b_{n+1}-1200=0.5(b_n-1200)$，

又$b_1=1200$，$\therefore b_n=1200$，则$b_{11}=1200$.

故选：C.

7. 四面体$ABCD$的四个顶点都在球O的球面上，$AB=AD=CD=2$，$BD=2\sqrt{2}$，$BD\perp CD$，平面$ABD\perp$平面BCD，则球O的体积为（　　）

A. $4\sqrt{2}\pi$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$　　C. $4\sqrt{3}\pi$　　D. 2π

【答案】C

【解析】

【分析】根据勾股定理和面面垂直的性质定理得到球心位于BC中点，再求出半径，利用球的体积公式得到答案.

【详解】$\because$四面体$ABCD$的顶点都在的球O的球面上,

且$AB=AD=CD=2,BD=2\sqrt{2}$，$BD\perp CD$，

$\therefore AB^2+AD^2=BD^2$， $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+2^2}=2\sqrt{3}$，

$\because$平面$ABD\perp$平面BCD,平面$ABD\cap$平面$BCD=BD$， $CD\subset$平面BCD，

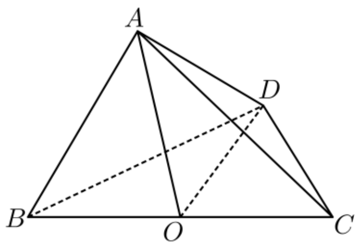
$\therefore CD\perp$平面ABD，又$\because AD\subset$平面ABD，$\therefore CD\perp AD$，

$\therefore AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$BC^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$，$AB^2+AC^2=2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=12$，

$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$，$\therefore AC\perp AB$，

取BC中点O,则



$OA=OB=OC=OD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$\therefore$球O的体积$V=\frac{4}{3}\pi\cdot(\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}\pi$.

故选：C.

8. 已知O是三角形ABC的外心，若$\frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}+\frac{AB}{AC}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=m\left(\overrightarrow{AO}\right)^2$，且$\sin B+\sin C=\sqrt{3}$，则实数$m$的最大值为（　　）

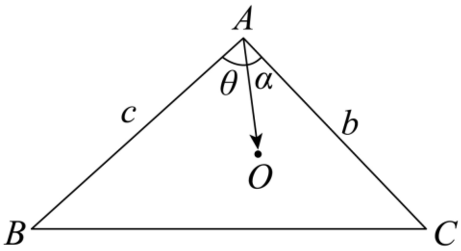
A. 6　　　　B. $\frac{6}{5}$　　　　C. $\frac{14}{5}$　　　　D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】首先利用数量积公式以及外心的条件，对所给的式子进行化简得到$m=\frac{bc}{|AO|^2}$，再结合正弦定理得到$b+c=2\sqrt{3}|AO|$，再消去$|AO|$得到$m=\frac{12bc}{(b+c)^2}$，最后利用不等式即可求得.

【详解】如图所示：设$AB=c,AC=b,\angle BAO=\theta,\angle CAO=\alpha$.



由题意可得，$\frac{b}{c}\cdot c\cdot|AO|\cos\theta+\frac{c}{b}\cdot b\cdot|AO|\cos\alpha=m\cdot|AO|^2$，化简可得$b\cos\theta+c\cos\alpha=m|AO|$，由$O$是三角形的外心可得，$O$是三边中垂线交点，

则$\cos\theta=\frac{c}{2AO},\cos\alpha=\frac{b}{2AO}$，代入上式得，$2bc=2m|AO|^2$，即$m=\frac{bc}{|AO|^2}$

依据题意，AO为外接圆半径，根据正弦定理可得，$\sin B=\frac{b}{2|AO|},\sin C=\frac{c}{2|AO|}$

代入$\sin B+\sin C=\sqrt{3}$得$b+c=2\sqrt{3}|AO|$，则$m=\frac{bc}{\frac{(b+c)^2}{12}}=\frac{12bc}{(b+c)^2}$

结合不等式可得$m=\frac{12bc}{(b+c)^2}\le\frac{12bc}{4bc}=3$，$\therefore m$的最大值为3

故选：D

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知函数$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，下列结论正确的是（　　）

A. 函数$f(x)$的最小正周期为2π

B. 函数$f(x)$的图象的一个对称中心为$\left(\frac{5\pi}{8},0\right)$

C. 函数$f(x)$在区间$\left(0,\frac{3\pi}{8}\right)$上单调递增

D. 函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{3\pi}{8}$个单位后得到的是一个偶函数的图象

【答案】BCD

【解析】

【分析】求出函数$f(x)$的周期可判断A；计算$f\left(\frac{5\pi}{8}\right)$是否等于0可判断B；求出函数$f(x)$的单调递增区间可判断C；根据图象的平移规律可判断D.

【详解】对于 A，函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 π，故 A 错误；

对于 B，当 $x=\frac{5\pi}{8}$ 时，$f\left(\frac{5\pi}{8}\right)=0$，故函数 $f\left(x\right)$ 的图象的一个对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{8},0\right)$ 满足条件，故 B 正确；

对于 C，令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，整理得：$-\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le k\pi+\frac{3\pi}{8}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，所以函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\frac{3\pi}{8}\right)$ 上单调递增，故 C 正确；

对于 D，函数 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位后得到 $g\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos 2x$，函数 $g\left(x\right)$ 为偶函数，故 D 正确.

故选：BCD.

10. 设非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 θ，定义运算 $\vec{a}*\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\theta$. 下列叙述正确的是（　　）

A. 若 $\vec{a}*\vec{b}=0$，则 $\vec{a}//\vec{b}$

B. 若 $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|=1$，则 $\left(\vec{a}*\vec{b}\right)_{\min}=-1$

C. 设在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则 $2S_{\triangle ABC}=\vec{a}*\vec{b}$

D. $\vec{a}*\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}*\vec{b}+\vec{a}*\vec{c}$（$\vec{c}$ 为任意非零向量）

【答案】AC

【解析】

【分析】根据所给对定义及正弦函数　性质判断 A、B、C，利用特殊值判断 D.

【详解】解：非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 θ，定义运算 $\vec{a}*\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\theta$，

对于 A：若 $\vec{a}*\vec{b}=0$，则 $\vec{a}*\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\theta=0$，即 $\sin\theta=0$，又 $\theta\in\left[0,\pi\right]$，

所以 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，故 A 正确；

对于 B：当 $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|=1$，则 $\vec{a}*\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\theta=\sin\theta$，因为 $\theta\in\left[0,\pi\right]$，所以 $\vec{a}*\vec{b}=\sin\theta\in\left[0,1\right]$，所以 $\left(\vec{a}*\vec{b}\right)_{\min}=0$，故 B 错误；

对于 C：在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin A$，所以 $2S_{\triangle ABC}=\vec{a}*\vec{b}$，故 C 正确；

对于 D：$\vec{a}*\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}+\vec{c}\right|\sin\alpha$ 其中 α 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}+\vec{c}$ 的夹角，

$\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\beta$ 其中 β 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，

$\vec{a}*\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\sin\gamma$ 其中 γ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角，

则 $\vec{a}*\vec{b}+\vec{a}*\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\beta+|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\sin\gamma$，

令 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(0,2)$，$\vec{c}=(0,-1)$，此时 $\vec{a}*\vec{b}=2$，$\vec{a}*\vec{c}=1$，$\vec{a}*\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=1$，

则 $\vec{a}*\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}*\vec{b}+\vec{a}*\vec{c}$ 不成立，故 D 错误；

故选：AC

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n^2+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则（　　）

A. 数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列

B. $a_4=\dfrac{10}{29}$

C. $a_{n+1}\le\dfrac{1}{2}$

D. 设数列 $\left\{\sqrt{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n，则 $S_{99}>18$

【答案】BD

【解析】

【分析】由题意可知，$a_n>0$，化简得出 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{{a_n}^2+1}<1$，即 $a_{n+1}<a_n$，可判断 A 的正误，根据递推公式可以求出前四项的值，即可判断 B 选项，通过 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{{a_n}^2+1}{a_n}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，可以利用累加法，并放缩求出 $a_{n+1}\ge\dfrac{1}{n+1}$，即可判断 C 选项，根据 C 选项的结论，再次使用放缩法，$a_n>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，裂项相消求出 S_n，可判断 D 选项.

【详解】选项 A，根据题意，因为 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{{a_n}^2+1}$，且 $a_1=1, {a_n}^2+1>1$，所以 $a_n>0$　$0<\dfrac{1}{{a_n}^2+1}<1$，

则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{{a_n}^2+1}<1$，所以 $a_{n+1}<a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 为单调递减数列.故 A 错误.

选项 B，$a_1=1, a_2=\dfrac{1}{2}, a_3=\dfrac{2}{5}, a_4=\dfrac{10}{29}$，故 B 选项正确.

选项 C，由 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n^2+1}$，得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{{a_n}^2+1}{a_n}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，$a_n>0,\therefore\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=a_n$

所以有 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=a_1,\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=a_2,\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}=a_3$，$\cdots$ $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=a_n$，将这 n 个等式相加，得：

$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，因为数列 $\{a_n\}$ 为 单调递减的数列，且 $a_1=1$ 所以

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<n\cdot a_1=n$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}\le n$，，即 $\frac{1}{a_{n+1}}\le n+1$

$a_{n+1}\ge\frac{1}{n+1}$，$\therefore a_{n+1}\ge\frac{1}{2}$，故 C 错误.

选项 D，由 C 选项的得：$a_n\ge\frac{1}{n}$，所以 $\sqrt{a_n}\ge\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{2}{\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，所以

$$\sqrt{a_n}>\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

当 $n\ge2$ 时 $\sqrt{S_n}=\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\cdots+\sqrt{a_n}>2\left[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right]$

$=2(\sqrt{n+1}-1)$，所以数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 的前 n 项 $S_n>2(\sqrt{n+1}-1)$，当 $n=99$ 时，$S_{99}>18$

故 D 正确.

故选：BD

【点睛】本题多次采用数列中的放缩法，以及求通项的累加法，求和的裂项相消，是一道数列的综合题目.

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E 为线段 AA_1 的中点，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，其中 λ，$\mu\in[0,1]$，则下列选项正确的是（　　）

A. $\mu=\frac{1}{2}$ 时，$A_1P\perp ED_1$

B. $\lambda=\frac{1}{4}$ 时，B_1P+PD 的最小值为 $\sqrt{13}$

C. $\lambda+\mu=1$ 时，直线 A_1P 与面 B_1D_1E 的交点轨迹长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\lambda+\mu=1$ 时，A_1P 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角不可能为 $\frac{\pi}{3}$

【答案】ABD

【解析】

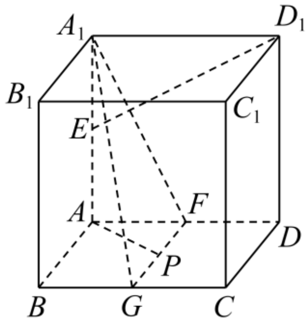
【分析】对于 A，根据向量运算的几何意义，确定点 P 的轨迹，根据线面垂直判定定理，可得答案；

对于 B，同 A 确定点 P 的轨迹，将立体图形平面化，根据在平面内两点之间线段最短，可得答案；

对于 C，根据平面向量共线定理推论，确定点 P 的轨迹，作图，确定直线 A_1P 与面 B_1D_1E 的交点轨迹，利用等边三角形以及相似三角形的性质，可得答案；

对于 D，根据线面夹角的定义，作图，根据正切函数的定义，计算其正切值的取值范围，可得答案.

【详解】对于 A，取 AD 的中点 F， BC 中点 G，连接 A_1F， A_1G， FG，



则 $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}$，

因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$， $\mu=\dfrac{1}{2}$， $\lambda\in[0,1]$，所以 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{AF}$，即点 P 在线段 FG 上，

因为 E 为线段 AA_1 的中点，则 $A_1E=AF$，故 $\triangle A_1ED_1\cong\triangle AFA_1$，所以 $\angle AA_1F=\angle A_1D_1E$，

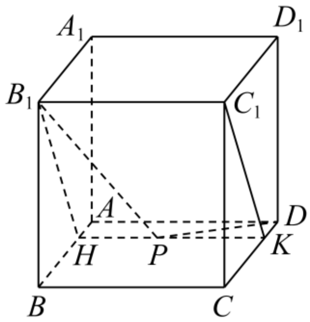
由于 $\angle AA_1F+\angle D_1A_1F=\angle A_1D_1E+\angle D_1A_1F=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $A_1F\perp D_1E$，

又因为 $GF\perp$ 平面 ADD_1A_1， $A_1F\subset$ 平面 ADD_1A_1，所以 $GF\perp D_1E$，

因为 $GF\cap A_1F=F$，所以 $D_1E\perp$ 平面 A_1FG， $A_1P\subset$ 平面 A_1FG,所以 $A_1P\perp ED_1$，故 A 正确;

对于 B，在 AB 上取点 H，使得 $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，在 DC 上取点 K，使得 $\overrightarrow{DK}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{DC}$，

因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$， $\lambda=\dfrac{1}{4}$， $\mu\in[0,1]$，所以点 P 在线段 HK 上，



将平面 B_1HKC_1 与平面 $AHKD$ 沿着 HK 展开到同一平面内，如图1，

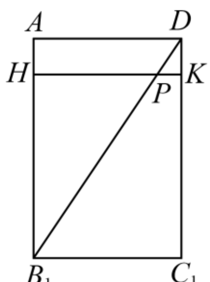


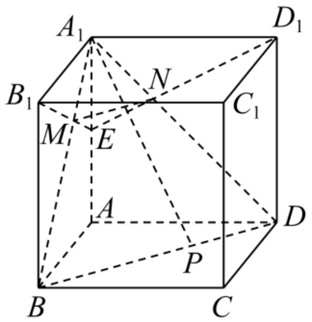
图 1

连接B_1D交HK于点P，即三点共线时，B_1P+PD取得最小值，

其中由勾股定理得：$B_1H=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$，所以$AB_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$，所以$B_1D=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，故 B 正确；

对于 C，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，$\lambda,\mu\in[0,1]$，$\lambda+\mu=1$，

由向量共线定理的推论可得：点P在线段BD上，连接A_1B，交B_1E于点M，A_1D，交D_1E于点N，连接MN，



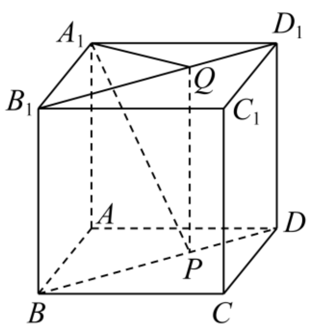
则线段MN即为直线A_1P与平面B_1D_1E的交点轨迹，

其中$\triangle A_1BD$为等边三角形，$\angle BA_1D=60^\circ$，由三角形相似可知：$\frac{A_1M}{MB}=\frac{A_1E}{B_1B}=\frac{1}{2}$，而$A_1B=2\sqrt{2}$，所以$A_1M=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

同理可得：$A_1N=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以$\triangle A_1MN$为等边三角形，所以$MN=A_1N=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

直线A_1P与平面B_1D_1E的交点轨迹长度为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故 C 错误；

对于 D，由 C 可知：点P在线段BD上，连接B_1D_1，过点P作$PQ\,//\,AA_1$交B_1D_1于点Q，连接A_1Q，A_1P，



则$PQ\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，即$\angle PA_1Q$为直线A_1P与平面$A_1B_1C_1D_1$所成的角，

在$Rt\triangle A_1B_1D_1$中，$|A_1Q|\in\left[\sqrt{2},2\right]$，$\tan\angle PA_1Q=\frac{PQ}{A_1Q}=\frac{2}{A_1Q}\in\left[1,\sqrt{2}\right]$，

由 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，则 $\angle PA_1Q<\frac{\pi}{3}$，故 D 正确；

故选：ABD.

【点睛】立体几何中的动点问题，关键在于明确点的运动轨迹，根据点、线、面的位置关系，以及线线角、线面角、面面角的定义，合理作图，利用几何性质，可解问题.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}$，那么 $\cos 2x=$____________.

【答案】$-\frac{7}{9}$

【解析】

【分析】利用诱导公式可求得 $\cos x$ 的值，再利用二倍角的余弦公式可求得 $\cos 2x$ 的值.

【详解】由诱导公式可得 $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x=\frac{1}{3}$，$\therefore \cos x=-\frac{1}{3}$，

因此，$\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{7}{9}$.

故答案为：$-\frac{7}{9}$.

14. 已知函数 $f(x)=ax^2+\left(x^2-2x+2\right)e^x$，不论 a 为何值，曲线 $y=f\left(x\right)$ 均存在一条固定的切线，则这条切线的方程是_________.

【答案】$y=2$

【解析】

【分析】求出导函数，求出与 a 无关的导数值，可得切点与斜率，从而可得切线方程.

【详解】由 $f(x)=ax^2+\left(x^2-2x+2\right)e^x$，得 $f'(x)=2ax+x^2e^x$，

则 $f'(0)=0, f(0)=2$，

这两个值均与 a 无关，

所以不论 a 取何值，曲线 $y=f\left(x\right)$ 均存在一条固定的切线，

此时切点为 $\left(0,2\right)$，

所以切线方程为 $y=2$，

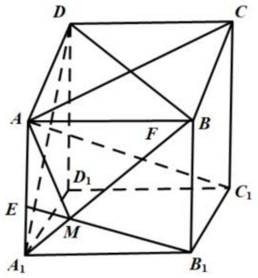
故答案为：$y=2$

15. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 3，点 E 满足 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EA_1}$，动点 M 在正方体表面及内部运动，并且总保持 $MD\perp AC_1$，则 $MA+ME$ 的最小值为______.

【答案】$\sqrt{10}$

【解析】

【分析】根据题意可证 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD，即可得动点 M 在平面 A_1BD 上运动，才能保持 $MD \perp AC_1$，然后结合图形，即可求得其最小值.

【详解】

连接 AC, BD

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，则 $AC \perp BD$， $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$

且 $BD \subset$ 平面 $ABCD$，则 $CC_1 \perp BD$，且 $AC \cap CC_1 = C$，

$AC, CC_1 \subset$ 平面 ACC_1，所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1，

且 $AC_1 \subset$ 平面 ACC_1，所以 $AC_1 \perp BD$；

同理可证 $A_1B \perp$ 平面 AB_1C_1，即得 $AC_1 \perp A_1B$，

且 $BD \cap A_1B = B$，所以 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD，

所以动点 M 在平面 A_1BD 上运动，才能总保持 $MD \perp AC_1$

因为点 A 关于 A_1B 的对称点为 B_1，

连接 EB_1 与直线 A_1B 相交于点 M，

当点 M 在该位置时， $MA + ME = MB_1 + ME = EB_1$

由 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EA_1}$，可得 $EA_1 = 1$，

且 $EB_1 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

所以当 E, M, B_1 三点共线， $MA + ME$ 最小，且最小值为 $\sqrt{10}$，

故答案为: $\sqrt{10}$

16. 1643 年法国数学家费马曾提出了一个著名的几何问题：已知一个三角形，求作一点，使其到这个三角形的三个顶点的距离之和为最小.它的答案是：当三角形的三个角均小于 120°时，所求的点为三角形的正等角中心（即该点与三角形的三个顶点的连线段两两成角 120°），该点称为费马点.已知 $\triangle ABC$ 中，其中 $\angle A = 60°$， $BC = 2$， P 为费马点，则 $PB + PC - PA$ 的取值范围是______.

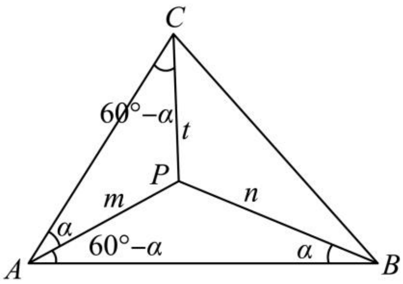
【答案】$[\frac{2\sqrt{3}}{3},2)$

【解析】

【分析】设 $PA=m,PB=n,PC=t,\angle PAC=\alpha(0°<\alpha<60°)$，进而得到 $\angle PBA,\angle PAB,\angle PCA$，然后在 $\triangle$PBC 中通过余弦定理得到 n，t 的关系式，在 $\triangle PAC$ 和 $\triangle PAB$ 中，通过正弦定理得到 t,m 的关系式和 m,n 的关系式，然后借助三角函数的性质和函数的性质求得答案.

【详解】如图，根据题意，设 $PA=m,PB=n,PC=t,\angle PAC=\alpha(0°<\alpha<60°)$，则

$\angle PBA=\alpha$，$\angle PAB=\angle PCA=60°-\alpha$，



在 $\triangle$PBC 中，由余弦定理有 $\cos120°=\frac{n^2+t^2-4}{2nt}=-\frac{1}{2}$，也即 $n+t=\sqrt{nt+4}$ ①

在 $\triangle PAC$ 中，由正弦定理有 $\frac{t}{\sin\alpha}=\frac{m}{\sin(60°-\alpha)}$，

在 $\triangle PAB$ 中，由正弦定理有 $\frac{m}{\sin\alpha}=\frac{n}{\sin(60°-\alpha)}$，

故 $\begin{cases} t=\frac{m\sin\alpha}{\sin(60°-\alpha)} \\ n=\frac{m\sin(60°-\alpha)}{\sin\alpha} \end{cases}$，则 $nt=m^2$，由①，$n+t=\sqrt{m^2+4}$ ②，

且 $\frac{m\sin(60°-\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{m\sin\alpha}{\sin(60°-\alpha)}=\sqrt{m^2+4}$，

所以 $\sqrt{1+\frac{4}{m^2}}=\frac{\sin(60^2-\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin(60^2-\alpha)}$，

设 $x=\frac{\sin(60°-\alpha)}{\sin\alpha}$，则 $x=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan\alpha}-\frac{1}{2}$，

由题意，$\tan\alpha\in(0,\sqrt{3})$，所以 $\frac{1}{\tan\alpha}\in(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$，所以 $x\in(0,+\infty)$，

而 $\sqrt{1+\frac{4}{m^2}}=x+\frac{1}{x}$，由对勾函数的性质可知 $\sqrt{1+\frac{4}{m^2}}\in[2,+\infty)$，

所以$m\in(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}]$，由②，

$PB+PC-PA=\sqrt{m^2+4}-m=\frac{4}{\sqrt{m^2+4}+m}$在$(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}]$上单调递减，

所以$PB+PC-PA\in[\frac{2\sqrt{3}}{3},2)$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$a_3+a_7=18$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【答案】（1）$a_n=2n-1$；

（2）$T_n=\frac{n}{2n+1}$.

【解析】

【分析】（1）首先根据已知条件列方程求出d，再根据等差数列通项公式求a_n即得；

（2）由题可得$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，再利用裂项相消法求和即得.

【小问 1 详解】

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

$\because a_1=1$，则由$a_3+a_7=18$，得$a_1+2d+a_1+6d=18$，

解得$d=2$，

所以$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$；

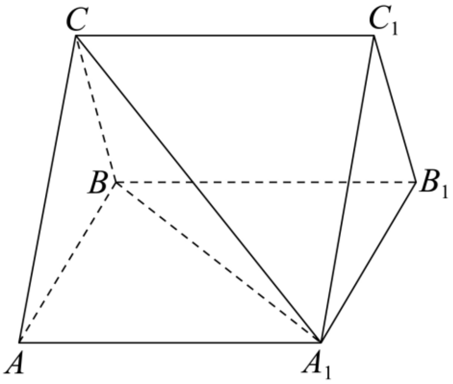
【小问 2 详解】

由题可得$b_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

18. 如图，在三棱柱中，$AB=AA_1=CA=CB=2$，$\angle BAA_1=\frac{\pi}{3}$.



（1）证明：$AB \perp A_1C$；

（2）若 $A_1C=\sqrt{6}$，求二面角 $A-A_1C-B$ 的余弦值.

【答案】（1）证明见解析；

（2）$\frac{1}{5}$.

【解析】

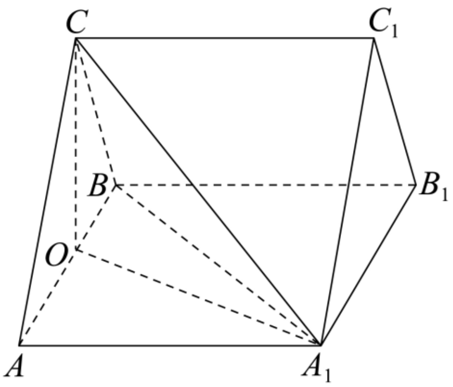
【分析】（1）设 O 为 AB 的中点，连接 CO, A_1O，先证明 $AB \perp$ 平面 A_1OC ,根据线面垂直的性质及可证明结论；

（2）建立空间直角坐标系，求出相关点　坐标，求得平面 AA_1C 和平面 A_1CB 的法向量，利用向量的夹角公式，即可求得答案.

【小问 1 详解】

证明：设 O 为 AB 的中点，连接 CO, A_1O ，

因为 $AB=AA_1=CA=CB=2$，$\angle BAA_1=\frac{\pi}{3}$，



则 $\triangle ABC, \triangle AA_1B$ 为正三角形，故 $CO \perp AB, A_1O \perp AB$ ，

$CO \cap A_1O=O, CO, A_1O \subset$ 平面 A_1OC ,故 $AB \perp$ 平面 A_1OC , $A_1C \subset$ 平面 A_1OC ,

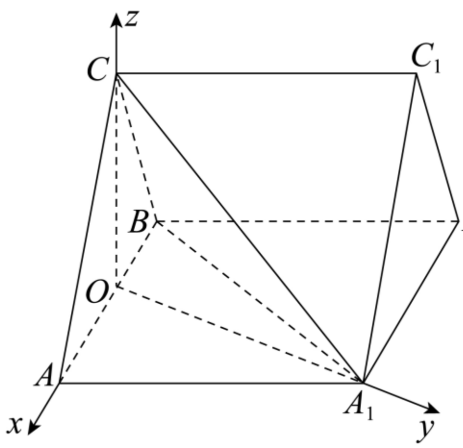
所以 $AB \perp A_1C$ ；

【小问 2 详解】

由（1）可知$CO=A_1O=\sqrt{3}$ 又$A_1C=\sqrt{6}$，即有$A_1C^2=CO^2+A_1O^2$，

故$CO\perp A_1O$ ，

故以 O 为坐标原点，以OA,OA_1,OC分别为x,y,z轴，建立空间直角坐标系，



则$A(1,0,0),A_1(0,\sqrt{3},0),B(-1,0,0),C(0,0,\sqrt{3})$ ，

故$\overrightarrow{AA_1}=(-1,\sqrt{3},0),\overrightarrow{CA_1}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3}),\overrightarrow{BA_1}=(1,\sqrt{3},0)$ ，

设平面AA_1C的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-x+\sqrt{3}y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CA_1}=\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$ ，

令$y=\sqrt{3}$ ，则$\vec{m}=(3,\sqrt{3},\sqrt{3})$，

设平面A_1CB的法向量为$\vec{n}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=a+\sqrt{3}b=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=\sqrt{3}b-\sqrt{3}c=0\end{cases}$ ，

令$b=\sqrt{3}$ ，则$\vec{n}=(-3,\sqrt{3},\sqrt{3})$，

故$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=-\dfrac{1}{5}$ ，

由图可知，二面角$A-A_1C-B$为锐角，故二面角$A-A_1C-B$的余弦值为$\dfrac{1}{5}$.

19. 已知函数$f(x)=\ln x+a(1-x),a\in R$.

（1）已知函数$f(x)$只有一个零点，求a的取值范围；

（2）若存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得$f(x_0)\geq 2a-2$成立，求实数a的取值范围.

【答案】（1） $a=1$或$a\leq 0$；（2）$(-\infty,1]$

【解析】

【分析】(1)先求导，再对 a 分类讨论，研究函数的图像，求得 a 的取值范围.(2)先转化得到$a\leq\dfrac{2+\ln x_0}{1+x_0}$，

再构造函数$g\left(x\right)=\dfrac{2+\ln x}{1+x}\left(x>0\right)$，再利用导数求函数 g(x)的最大值得 a 的取值范围.

【详解】（1） $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-a$，定义域为$\left(0,+\infty\right)$

① 若$a\le 0$则$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上为增函数

因为$f\left(1\right)=0$，有一个零点，所以$a\le 0$符合题意；

② 若$a>0$　令$f'\left(x\right)=0$，得$x=\dfrac{1}{a}$，此时$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$单调递增，$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$单调递减

$f\left(x\right)$的极大值为$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，因为$f\left(x\right)$只有一个零点，所以$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$，

即$\ln\dfrac{1}{a}+a\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=0$，所以$a=1$

综上所述$a=1$或$a\le 0$.

（2）因为$\exists x_0\in\left(0,+\infty\right)$，使得$f\left(x_0\right)\ge 2a-2$，所以$a\le\dfrac{2+\ln x_0}{1+x_0}$

令$g\left(x\right)=\dfrac{2+\ln x}{1+x}\left(x>0\right)$，即$a\le g\left(x\right)_{max}$，因为$g\left(x\right)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{\left(1+x\right)^2}$

设$h\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1$，$h'\left(x\right)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}<0$，所以$h\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$单调递减，又$h\left(1\right)=0$

故函数$g\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$单调递增，$\left(1,+\infty\right)$单调递减，$g\left(x\right)$的最大值为$g\left(1\right)$，$a\le g\left(1\right)=1$

故答案为$\left(-\infty,1\right]$.

【点睛】(1)本题主要考查利用导数求函数　单调性和最值，意在考查学生对这些知识的掌握水平和分析推理能力.(2)第 2 问的解题关键有两点，其一是分离参数转化为$a\le\dfrac{2+\ln x_0}{1+x_0}$，其二是构造函数$g\left(x\right)=\dfrac{2+\ln x}{1+x}\left(x>0\right)$，再利用导数求函数 g(x)的最大值得 a 的取值范围.

20. 记S_n为正项数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，且$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=S_n^2$.

（1）证明：$a_n^2+a_n=2S_n$；

（2）记数列$\left\{\dfrac{a_n^2}{S_n}\right\}$的前$n$项积为$T_n$，证明：数列$\left\{T_n\right\}$是递增数列.

【答案】（1）证明见解析；

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）当$n=1$时，求得$a_1=1$，当$n\geq 2$时，由$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=S_n^2$，得

$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{n-1}^3=S_{n-1}^2$，两式相减化简可证得结论；

（2）由（1）可得当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{a_n^{\ 2}+a_n}{2}-\dfrac{a_{n-1}^{\ \ 2}+a_{n-1}}{2}$，化简后可得$a_n-a_{n-1}=1$，则可得

数列$\left\{a_n\right\}$是以 1 为公差，1 为首项的等差数列，所以可求出a_n，S_n，令$b_n=\dfrac{a_n^2}{S_n}=\dfrac{2n}{n+1}$，从而可求出$T_n$，

然后求$T_{n+1}-T_n$即可得结论.

【小问 1 详解】

证明：当$n=1$时，$a_1^3=S_1^2=a_1^{\ 2}$，因为$a_n>0$，所以$a_1=1$，

当$n\geq 2$时，由$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=S_n^2$，得

$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{n-1}^3=S_{n-1}^2$，

所以$a_n^{\ 3}=S_n^{\ 2}-S_{n-1}^{\ \ 2}=(S_n+S_{n-1})(S_n-S_{n-1})=a_n(S_n+S_{n-1})$，

因为$a_n>0$，所以$a_n^{\ 2}=S_n+S_{n-1}=2S_n-a_n$，

所以$a_n^2+a_n=2S_n$，

当$n=1$时，$a_1=1$满足上式，

所以$a_n^2+a_n=2S_n$；

【小问 2 详解】

由（1）得$a_n^2+a_n=2S_n$，则$S_n=\dfrac{a_n^2+a_n}{2}$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{a_n^{\ 2}+a_n}{2}-\dfrac{a_{n-1}^{\ \ 2}+a_{n-1}}{2}$，

所以$2a_n=a_n^{\ 2}+a_n-a_{n-1}^{\ \ 2}-a_{n-1}$，

所以$\left(a_n^{\ 2}-a_{n-1}^{\ \ 2}\right)-\left(a_n+a_{n-1}\right)=0$，

所以$\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}-1\right)=0$，

因为$a_n>0$，所以$a_n-a_{n-1}=1$，

所以数列$\left\{a_n\right\}$是以 1 为公差，1 为首项的等差数列，

所以$a_n=1+(n-1)=n$，$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

令 $b_n=\dfrac{a_n^2}{S_n}=\dfrac{n^2}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2n}{n+1}$，

所以 $T_n=b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_n$

$=\dfrac{2\times1}{2}\times\dfrac{2\times2}{3}\times\dfrac{2\times3}{4}\times\cdots\times\dfrac{2n}{n+1}$

$=2^n\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{n}{n+1}\right)$

$=\dfrac{2^n}{n+1}$，

所以 $T_{n+1}-T_n=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^n}{n+1}$

$=2^n\left(\dfrac{2}{n+2}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=2^n\cdot\dfrac{2(n+1)-(n+2)}{(n+2)(n+1)}$

$=2^n\cdot\dfrac{n}{(n+2)(n+1)}>0$，

所以 $T_{n+1}>T_n$，

所以数列 $\{T_n\}$ 是递增数列.

21. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

（1）求 $\dfrac{\sin B}{\sin C}$；

（2）记 $\triangle ABC$ 的面积为 S，求 $\dfrac{S}{a^2}$ 的最大值.

【答案】（1） $\dfrac{\sin B}{\sin C}=\sqrt{2}$

（2） $\dfrac{S}{a^2}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】（1）利用平面向量的数量积的定义结合余弦定理可得出 b 、 c 的等量关系，再利用正弦定理可求得 $\dfrac{\sin B}{\sin C}$ 的值；

（2）由三角形的面积公式以及余弦定理可得出 $\dfrac{S}{a^2}=\dfrac{\sin A}{3\sqrt{2}-4\cos A}$ ，令 $\dfrac{S}{a^2}=t>0$ ，利用辅助角公式结

合正弦型函数的有界性可得出关于t的不等式，即可求得t的最大值.

【小问 1 详解】

解：因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，

由平面向量数量积的定义可得$cb\cos A+2ca\cos B=ba\cos C$，

即$bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+2ac\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理可得$b=\sqrt{2}c$，

由正弦定理可得$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{b}{c}=\sqrt{2}$.

【小问 2 详解】

解：$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c^2\sin A$，由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3c^2-2\sqrt{2}c^2\cos A$，

所以，$\dfrac{S}{a^2}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}c^2\sin A}{3c^2-2\sqrt{2}c^2\cos A}=\dfrac{\sin A}{3\sqrt{2}-4\cos A}$，令$\dfrac{S}{a^2}=t>0$，即$\dfrac{\sin A}{3\sqrt{2}-4\cos A}=t$，

可得$3\sqrt{2}t=\sin A+4t\cos A=\sqrt{1+16t^2}\sin(A+\varphi)\le\sqrt{1+16t^2}$，$\varphi$为锐角，且$\tan\varphi=4t$，

所以，$18t^2\le1+16t^2$，解得$0<t\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时$\tan\varphi=2\sqrt{2}$，

当$A=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$时，t取得最大值$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故$\dfrac{S}{a^2}$的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

22. 已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，$a_1=2$且$b_n=1-\dfrac{1}{a_n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，函数$f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{mx}{1+x}$，其中$m>0$.

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）若数列$\{a_n\}$各项均为正整数，且对任意的$n\in\mathbf{N}^*$都有$\left|a_{n+1}-\dfrac{2a_n^2+a_{n+1}}{a_n+1}\right|<\dfrac{1}{2}$. 求证：

（i）$a_{n+1}=2a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；

（ii）$b_1b_2b_3\cdots b_n>\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}$，其中$\mathrm{e}=2.71828\cdots$为自然对数的底数.

【答案】（1）单调增区间为$(-1,m-1)$，单调减区间为$(m-1,+\infty)$

（2）（i）、（ii）证明见解析

【解析】

【分析】（1）求导之后，分别令$f'(x)>0$，$f'(x)<0$即可求得单调区间（2）（i）将已知恒成立的不等式

化简之后再放缩得到$\left|a_{n+1}-2a_n\right|<1$，又$a_{n+1}-2a_n$为整数，则$a_{n+1}-2a_n=0$，即得所证（ii）对所要证明的不等式两边同时取对数，等价转化为$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)>-\frac{5}{3}$，利用（1）的结论可得$\ln(1+x)\ge\frac{x}{1+x}$（$x>-1$），赋值累加之后进一步将问题转化为证明$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k-1}<\frac{5}{3}$，对通项进行放缩，即可证明

【小问 1 详解】

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{m}{(1+x)^2}=\frac{x-(m-1)}{1+x}$（$x>-1$），

令$f'(x)=0$得$x=m-1$.

因为$m>0$，所以$m-1>-1$，

当$x\in(-1,m-1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(m-1,+\infty)$时，$f'\ x\ >0$.

故函数$f(x)$的单调递减区间为$(-1,m-1)$，单调递增区间为$(m-1,+\infty)$.

【小问 2 详解】

（i）**法一**：因为$\{a_n\}$各项均为正整数，即$a_n\ge1$，故$\frac{a_n}{1+a_n}\ge\frac{1}{2}$.

于是$\left|a_{n+1}-\frac{2a_n^2+a_{n+1}}{a_n+1}\right|=\left|\frac{a_n}{a_n+1}\left(a_{n+1}-2a_n\right)\right|\ge\frac{1}{2}\left|a_{n+1}-2a_n\right|$，

又$\left|a_{n+1}-\frac{2a_n^2+a_{n+1}}{a_n+1}\right|<\frac{1}{2}$，

所以$\left|a_{n+1}-2a_n\right|<1$，

由题意$a_{n+1}-2a_n$为整数，

因此只能$\left|a_{n+1}-2a_n\right|=0$，

即$a_{n+1}=2a_n$.

（i）**法二**：由题，$\left|a_{n+1}-\frac{2a_n^2+a_{n+1}}{a_n+1}\right|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{a_{n+1}a_n-2a_n^2}{a_n+1}\right|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}-\frac{1}{2a_n}<\left|a_{n+1}-2a_n\right|<\frac{1}{2a_n}+\frac{1}{2}$，

因为$\{a_n\}$各项均为正整数，即$a_n\ge1$，

故$0<\frac{1}{2a_n}\le\frac{1}{2}$，于是$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2a_n}\in(-1,0)$且$\frac{1}{2a_n}+\frac{1}{2}\in(0,1)$.

由题意$a_{n+1}-2a_n$为整数，因此只能$\left|a_{n+1}-2a_n\right|=0$，即$a_{n+1}=2a_n$.

（ii）**法一**：由$a_1=2$，得$a_n=2^n$，$b_n=1-\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{2^n}$.

原不等式$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>e^{-\frac{5}{3}}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)>-\frac{5}{3}$.

由（1）知$m=1$时，$\ln(1+x)\geq\frac{x}{1+x}$（$x>-1$），

取$x=-\frac{1}{2^k}$得$\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\geq\frac{-1}{2^k-1}$.

因此只需证：$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\geq-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k-1}>-\frac{5}{3}$，

即证明$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k-1}<\frac{5}{3}$.

记$c_k=\frac{1}{2^k-1}$，则$\frac{c_{k+1}}{c_k}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}<\frac{2^k-1}{2^{k+1}-2}=\frac{1}{2}\Rightarrow c_{k+1}<\frac{1}{2}c_k$.

$S_1=1<\frac{5}{3}$；$S_2=1+\frac{1}{3}<\frac{5}{3}$；

当$n\geq3$时，$S_n<c_1+c_2+\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{2^2}c_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}c_2=1+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}<\frac{5}{3}$.

故原不等式成立.

（ii）**法二**：由$a_1=2$，得$a_n=2^n$，$b_n=1-\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{2^n}$.

原不等式$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>e^{-\frac{5}{3}}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)>-\frac{5}{3}$.

由（1）知$m=1$时，$\ln(1+x)\geq\frac{x}{1+x}$（$x>-1$），

取$x=-\frac{1}{2^k}$得$\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\geq\frac{-1}{2^k-1}$.

因此只需证：$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\geq-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k-1}>-\frac{5}{3}$，

即证明$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k-1}<\frac{5}{3}$.

$S_1=1<\frac{5}{3}$；$S_2=1+\frac{1}{3}<\frac{5}{3}$；

当$k\geq3$时，$2^k>4$，故$4\left(2^k-1\right)>3\cdot2^k$，即$\frac{1}{2^k-1}<\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^k}$.

当$n \geq 3$时，$S_n = \frac{4}{3} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2^k - 1} < \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}} < \frac{5}{3}$.

故原不等式成立.

【点睛】利用导数证明不等式，一般要结合所证不等式，抽象构造出函数，利用导数求出函数的单调性或最值，证明不等式成立，然后把已经证明的不等式替换，或应用得到需要证明的不等式，能力要求较高，属于难题.