2020-2021学年重庆市西南大学附中高二（上）期中数学试卷

一、单选题：本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5分）已知向量$\overrightarrow{a}=(2,\ 1)$，$\overrightarrow{b}=(0,\ m)$，$\overrightarrow{c}=(2,\ 4)$，且$(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{c}$，则实数$m$的值为（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

2．（5分）已知△ABC的内角∠A，∠B，∠C的对边分别为a，b，c．若$\frac{a}{\sin A}=\frac{1}{3}$，则$\frac{b+c-a}{\sin B+\sin C-\sin A}$等于（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．4　　C．$\frac{1}{3}$　　D．3

3．（5分）设常数$a\in\mathbf{R}$．若$(x^2+\frac{a}{x})^5$的二项展开式中x^7项的系数为﹣15，则a=（　　）

A．﹣2　　B．2　　C．3　　D．﹣3

4．（5分）圆$x^2-4x+y^2=0$与圆$x^2+y^2+4x+3=0$的公切线共有（　　）

A．1条　　B．2条　　C．3条　　D．4条

5．（5分）有6个人排成一排拍照，其中甲和乙相邻，丙和丁不相邻的不同的排法有（　　）

A．240种　　B．144种　　C．72种　　D．24种

6．（5分）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=10$，$a_2=12$，$\frac{S_{n+1}-2S_n+S_{n-1}}{n}=2(n\geqslant 2)$，则$\frac{a_n}{n}$的最小值为（　　）

A．$\frac{16}{3}$　　B．$2\sqrt{10}-1$　　C．$\frac{11}{2}$　　D．$\frac{21}{4}$

7．（5分）抛物线$y=2x^2$上有一动弦AB，中点为M，且弦AB的长度为3，则点M的纵坐标的最小值为（　　）

A．$\frac{11}{8}$　　B．$\frac{5}{4}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．1

8．（5分）已知O，F分别是双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的中心和右焦点，以$OF$为直径的圆与双曲线的两条渐近线分别交于$A$，$B$两点（$A$，$B$异于原点$O$），若$|AB|=\sqrt{3}b$，则双曲线$C$的离心率$e$为（　　）

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{2}$

二、多选题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9.（5 分）下列结论中，所有正确的结论是（　　）

A．若$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$，则 $ac^2>bc^2$

B．若实数 a，b，$m>0$，则$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$

C．当 $x\in$（0，π）时，$\sin x+\frac{1}{\sin x}\geqslant 2$

D．若实数 a，$b>0$，$a+b=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\geqslant 9$

10.（5 分）下列关于排列数与组合数的等式中，正确的是（　　）

A．$(n+1)A_n^m=A_{n+1}^{m+1}$　　B．$mC_n^m=nC_{n-1}^{m-1}$

C．$C_n^m=\frac{A_n^m}{n!}$　　D．$\frac{1}{n-m}A_n^{m+1}=A_n^m$

11.（5 分）已知 a_1，a_2，a_3，a_4 依次成等比数列，且公比 q 不为 1．将此数列删去一个数后得到的数列（按原来的顺序）是等差数列，则正数 q 的值是（　　）

A．$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　B．$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　C．$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

12.（5 分）已知椭圆C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 e_1，椭圆 C_1 的上顶点为 P，且△PF_1F_2 的面积为 b^2.双曲线 C_2 和椭圆 C_1 焦点相同，且双曲线 C_2 的离心率为 e_2，M 是椭圆 C_1 与双曲线 C_2 的一个公共点，若$\angle F_1MF_2=\frac{\pi}{3}$，则下列说法正确的是（　　）

A．$\frac{e_2}{e_1}=\sqrt{3}$　　B．$e_1e_2=\frac{3}{4}$　　C．$e_1^2+e_2^2=2$　　D．$e_1^2-e_2^2=\frac{3}{2}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

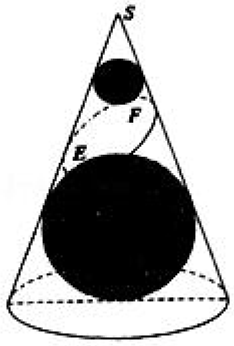
13.（5 分）若实数 x，y 满足约束条件$\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0\\x-y-1\geqslant 0\\y+1\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

14.（5 分）在△ABC 中，$BC=\sqrt{2}$，且 $\cos^2C-\cos^2A-\sin^2B=-\sqrt{2}\sin B\sin C$，则△$ABC$ 外接圆的面积为_____.

15.（5 分）某学校安排 5 名高三教师去 3 个学校进行交流学习，且每位教师只去一个学校，

要求每个学校至少有一名教师进行交流学习，则不同的安排方式共有________种．

16．（5 分）如图是数学家 *GerminalDandelin* 用来证明一个平面截圆锥得到的截口曲线是椭圆的模型（称为“*Dandelin* 双球”）；在圆锥内放两个大小不同的小球，使得它们分别与圆锥的侧面、截面相切，设图中球 O_1，球 O_2 的半径分别为 3 和 1，球心距离$|O_1O_2|=8$，截面分别与球 O_1，球 O_2 切于点 E，F，（E，F 是截口椭圆的焦点），则此椭圆的离心率等于____________________．



四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（8 分）已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $S_n^2-(n^2+n)S_n=0$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{4}{a_n\cdot a_{n+1}}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n．证明：$T_n<1$．

18．（12 分）已知$\overrightarrow{a}=(\sin(x+\dfrac{\pi}{12}),2\sin x+2)$，$\overrightarrow{b}=(2\cos(x+\dfrac{\pi}{12}),\sin x-1)$，且 $f(x)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$．

（1）求函数 $y=f(x)$ 的单调减区间和对称轴；

（2）若关于 x 的不等式 $f(x)+1<m$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{3}]$上恒成立，求 m 的取值范围．

19．（12 分）已知圆 C：$x^2+y^2+2x-4y+3=0$．

（1）若圆 C 的切线在 x 轴和 y 轴上的截距相等，且截距不为零，求此切线的方程；

（2）若从圆 C 外一点 $P(1,-2)$ 向该圆引切线 PA 和 PB（A，B 为切点），求弦长 AB 的大小．

20．（12 分）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．已知$\dfrac{\cos C}{\cos A}=\dfrac{\sqrt{2}b-c}{a}$．

（1）求 A；

（2）△ABC 中线 AD 长为$\frac{\sqrt{29}}{2}$，AC 长为$2\sqrt{2}$，求△ABC 的面积．

21．（12 分）设圆C：$x^2+y^2=\frac{12}{7}$，椭圆 G 的焦点在 x 轴上，其右顶点为 A，上顶点为 B，其离心率为$\frac{1}{2}$，直线 AB 与圆 C 相切．

（1）求椭圆 G 的标准方程；

（2）设直线 l 过点 M（﹣1，0）且与曲线 G 交于 P，Q 两点，N（1，0），求△NPQ 的内切圆面积的最大值．

22．（14 分）已知点 Q 是圆 M：$(x+1)^2+y^2=16$ 上一动点（M 为圆心），点 N 的坐标为（1，0），线段 QN 的垂直平分线交线段 QM 于点 C，动点 C 的轨迹为曲线 E．

（1）求曲线 E 的轨迹方程；

（2）求直线 $y=x-1$ 与曲线 E 的相交弦长；

（3）曲线 E 的右顶点为 B，直线 l：$y=kx+m$ 与椭圆 E 相交于点 S，T，则直线 BS，BT 的斜率分别为 k_1，k_2 且 $k_1+k_2=3$，$BD\perp ST$，D 为垂足，问是否存在某个定点 A，使得以 AB 为直径的圆经过点 D？若存在，请求出 A 的坐标；若不存在，请说明理由？

2020-2021学年重庆市西南大学附中高二（上）期中数学试卷

参考答案与试题解析

一、单选题：本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【解答】解：∵向量$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(0,\ m)$，$\vec{c}=(2,\ 4)$，

∴$\vec{a}-\vec{b}=(2,\ 1-m)$.

∵$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{c}$，∴$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=2\times2+(1-m)\times4=0$，

求得 $m=2$，

故选：C.

2.【解答】解：由正弦定理知，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{3}$，

∴$\sin A=3a$，$\sin B=3b$，$\sin C=3c$，

∴$\frac{b+c-a}{\sin B+\sin C-\sin A}=\frac{b+c-a}{3b+3c-3a}=\frac{1}{3}$.

故选：C.

3．【解答】解：$(x^2+\frac{a}{x})^5$的二项展开式的通项公式为

$T_{r+1}=C_5^r\cdot(x^2)^{5-r}\cdot(\frac{a}{x})^r=a^r\cdot C_5^r\cdot x^{10-3r}$，$r=0$，1，2，3，4，5.

令$10-3r=7$，得$r=1$，

所以展开式中x^7项的系数为$a\cdot C_5^1=-15$，解得$a=-3$，

故选：D.

4.【解答】解：根据题意，圆$x^2-4x+y^2=0$，即$(x-2)^2+y^2=4$，其圆心为（2，0），半径$R=2$，

圆$x^2+y^2+4x+3=0$，即$(x+2)^2+y^2=1$，其圆心为（﹣2，0），半径$r=1$，

两圆的圆心距$d=4$，有$d>\mathbf{R}+r=3$，

则两圆外离，有4条公切线，

故选：D.

5.【解答】解：由题意，第一步将甲与丁乙绑定，两者的站法有2种，第二步将此两人看作一个整体，与除丙丁之外的两人看作3个元素做一个全排列有A_3^3种站法，此时隔开了四个空，第三步将丙丁两人插入四个空，排法种数为A_4^2

则不同的排法种数为 $2\times A_3^3\times A_4^2=144$.

故选：B.

6.【解答】解：因为 $a_1=10$，$a_2=12$，$\frac{S_{n+1}-2S_n+S_{n-1}}{n}=2(n\geqslant 2)$，

所以$\frac{a_{n+1}-a_n}{n}=2$，即 $a_{n+1}-a_n=2n$，（$n\geqslant 2$），结合 $a_3-a_2=4$，$a_2-a_1=2$，

可知$\{a_{n+1}-a_n\}$是以 $a_2-a_1=2$ 为首项，公差为 2 的等差数列.

故：$a_2-a_1=2\times 1$，

$a_3-a_2=2\times 2$，

$a_4-a_3=2\times 3$，

…………

$a_n-a_{n-1}=2\times$（$n-1$），

上述 $n-1$ 个式子相加得：$a_n-a_1=2\times\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}$，

所以 $a_n=n^2-n+10$，所以$\frac{a_n}{n}=n+\frac{10}{n}-1$，

因为函数$y=x+\frac{10}{x}$，$x>0$ 在（0，$\sqrt{10}$）上递减，在（$\sqrt{10}$，$+\infty$）递增，

且 $n=3$ 时，$\frac{a_3}{3}=\frac{16}{3}$；$n=4$ 时，$\frac{a_4}{4}=\frac{22}{4}>\frac{16}{3}$.

故$\frac{a_n}{n}$最小值为$\frac{16}{3}$.

故选：A.

7.【解答】解：设直线 AB 的方程为 $y=kx+b$，联立$\begin{cases}y=kx+b\\ y=2x^2\end{cases}$，化为 $2x^2-kx-b=0$，

由题意可得$\triangle=k^2+8b>0$.

$\therefore x_1+x_2=\frac{k}{2}$，$x_1x_2=-\frac{b}{2}$.

$\because |AB|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=3$，

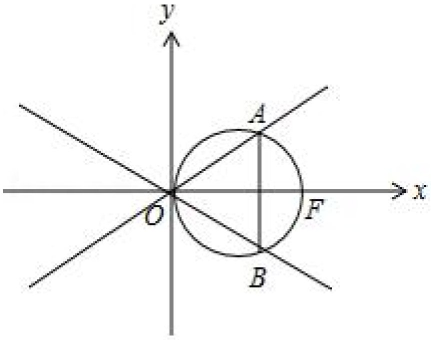
$b=\frac{1}{2}(\frac{9}{1+k^2}-\frac{k^2}{4})$

AB 中点 M 的纵坐标 $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=x_1{}^2+x_2{}^2=\frac{k^2}{4}+b=\frac{k^2}{8}+\frac{9}{2(1+k^2)}=$

$\frac{k^2+1}{8}+\frac{9}{2(1+k^2)}-\frac{1}{8}\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{16}}-\frac{1}{8}=\frac{11}{8}$.

故选：A.

8.【解答】解：如图，



以 OF 为直径的圆的方程为 $(x-\frac{c}{2})^2+y^2=\frac{c^2}{4}$，

即 $x^2-cx+y^2=0$，

联立 $\begin{cases} y=\frac{b}{a}x \\ x^2-cx+y^2=0 \end{cases}$，解得 $y=\frac{ab}{c}$，即点 A 的纵坐标为 $\frac{ab}{c}$.

$\therefore |AB|=\frac{2ab}{c}=\sqrt{3}b$，即 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故选：C.

二、多选题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9.【解答】解：对于选项 A：由于 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$，所以 $a>b$，$c^2>0$，故 $ac^2>bc^2$，故 A 正确，

对于选项 B：当 $\frac{b}{a}$ 为真分数时，不等式成立，当 $\frac{b}{a}$ 为假分数时，不等式不成立，故 B 错误，

对于选项 C：$x\in(0，\pi)$ 时 $\sin x+\frac{1}{\sin x}\geqslant 2\sqrt{\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}}=2$，当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，等号成立，故 C 正确，

对于选项 D：若 a，$b\in\mathbf{R}^*$，$a+b=1$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{4(a+b)}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=5+4=9$，当且仅当 $b=2a$ 时“＝”成立，故 D 正确.

故选：ACD.

10.【解答】解：由题意利用排列、组合数公式，可得 $(n+1)A_n^m=(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)=A_{n+1}^{m+1}$，故 A 正确；

$\because m C_n^m=m\cdot\frac{A_n^m}{m!}=\frac{A_n^m}{(m-1)!}$，$n C_{n-1}^{m-1}=n\cdot\frac{A_{n-1}^{m-1}}{(m-1)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!}=\frac{A_n^m}{(m-1)!}$，$\therefore m C_n^m=n C_{n-1}^{m-1}$，故 B 成立；

$\because C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$，$\frac{A_n^m}{n!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{n!}=\frac{n!}{n!(n-m)!}=\frac{1}{(n-m)!}$，$\therefore C_n^m\neq\frac{A_n^m}{n!}$，故 C 不成立；

$\because \frac{1}{n-m}A_n^{m+1}=\frac{1}{n-m}\cdot n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=A_n^m$，故 D 成立，

故选：ABD.

11．【解答】解：$\because$公比 q 不为 1，$\therefore$删去的不是 a_1 与 a_4，

当删去的是 a_2 时：

$\because a_1$，a_3，a_4 成等差数列，$\therefore 2a_3=a_1+a_4$，

即 $2a_1q^2=a_1+a_1q^3$，解得 $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或 $q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍）；

当删去的是 a_3 时：

$\because a_1$，a_2，a_4 成等差数列，$\therefore 2a_2=a_1+a_4$，

即 $2a_1q=a_1+a_1q^3$，解得 $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$或 $q=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（舍），

综上，$q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$或 $q=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，

故选：AB.

12．【解答】解：由题意可得$\triangle PF_1F_2$ 的面积为$\frac{1}{2}\cdot b\cdot 2c=b^2$，

即有 $b=c$，则 $e_1=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{2}c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

设双曲线的方程为$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$（$m>0$，$n>0$），$M$ 在第一象限，且$|MF_1|=s$，$|MF_2|=t$，

由椭圆的定义可得 $s+t=2a$，由双曲线的定义可得 $s-t=2m$，

解得 $s=a+m$，$t=a-m$，

在$\triangle MF_1F_2$ 中，$\cos\angle F_1MF_2=\frac{s^2+t^2-4c^2}{2st}=\frac{1}{2}$，

则 $s^2+t^2-st=4c^2$，可得（$a+m$）^{2}+（$a-m$）^{2}-（$a+m$）（$a-m$）$=a^2+3m^2=4c^2$，

则$\frac{a^2}{c^2}+\frac{3m^2}{c^2}=4$，即有$\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$，

由 $e_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $e_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

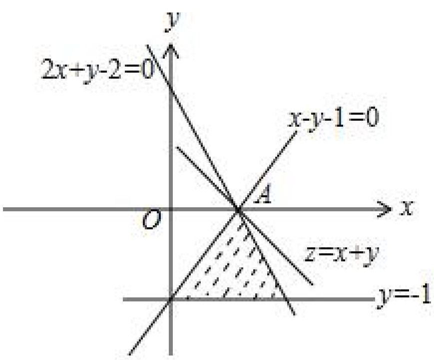
则 $e_1e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{e_2}{e_1}=\sqrt{3}$，$e_1^2+e_2^2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$，$e_1^2-e_2^2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$，

所以选项 AC 正确；BD 错误．

故选：AC．

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．【解答】解：由约束条件$\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0\\ x-y-1\geqslant 0\\ y+1\geqslant 0\end{cases}$作出可行域如图，



化目标函数 $z=x+y$ 为 $y=-x+z$，由图可知，当直线 $y=-x+z$ 过 A（1，0）时，

直线在 y 轴上的截距最大，z 有最大值为 1．

故答案为：1．

14．【解答】解：$\because \cos^2C-\cos^2A-\sin^2B=-\sqrt{2}\sin B\sin C$，

$\therefore$（$1-\sin^2C$）-（$1-\sin^2A$）$-\sin^2B=-\sqrt{2}\sin B\sin C$，

即 $\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=-\sqrt{2}\sin B\sin C$，

由正弦定理知，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore a^2-b^2-c^2=-\sqrt{2}bc$，

由余弦定理知，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{2}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

设△ABC外接圆的半径为r，则$2r=\frac{a}{\sin A}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

∴$r=1$，

∴△ABC外接圆的面积为$\pi r^2=\pi$.

故答案为：π.

15.【解答】解：根据题意，分 2 步进行分析：

①将 5 名教师分成 3 组，

若分为 1、1、3 的三组，有$C_5^3=10$种分组方法，

若分为 1、2、2 的三组，由$\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}=15$种分组方法，

则一共有 10+15＝25 种分组方法，

②将分好的三组全排列，安排到三个学校，有$A_3^3=6$种情况，

则有 25×6＝150 种不同的安排方式，

故答案为：150.

16.【解答】解：如图，圆锥面与其内切球O_1、O_2分别相切与B，A，

连接O_1B，O_2A，则$O_1B\perp AB$，$O_2A\perp AB$，过O_1作$O_1D\perp O_2A$于D，

连接O_1F，O_2E，EF 交O_1O_2于点C.

设圆锥母线与轴的夹角为α，截面与轴的夹角为β.

在 Rt△O_1O_2D中，$DO_2=3-1=2$，$O_1D=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$.

∴$\cos\alpha=\frac{O_1D}{O_1O_2}=\frac{2\sqrt{15}}{8}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

∵$O_1O_2=8$，

$CO_2=8-O_1C$，

∵△EO_2C∽△FO_1C，

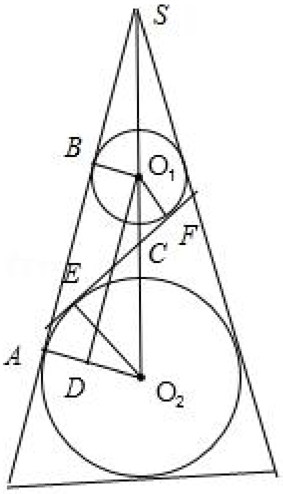
∴$\frac{8-O_1C}{O_2E}=\frac{O_1C}{O_1F}$，解得$O_1C=2$.

∴$CF=\sqrt{O_1C^2-FO_1^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

即$\cos\beta=\frac{CF}{O_1C}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

则椭圆的离心率 $e=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解答】解：（1）各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n^2-(n^2+n)S_n=0$ ①.

当 $n=1$ 时，解得 $a_1=2$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}^2-[(n-1)^2+(n-1)]S_{n-1}=0$ ②，

① - ②得：$a_n=S_n-S_{n-1}=2n$，（首项符合通项），

故 $a_n=2n$.

证明：（2）由（1）得 $b_n=\dfrac{4}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

所以 $T_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}<1$

18.【解答】解：（1）$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=2\sin(x+\dfrac{\pi}{12})\cos(x+\dfrac{\pi}{12})+2(\sin^2x-1)$

$=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})-2\cos^2x=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})-\cos 2x-1$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x-1$

$=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-1$.

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

解得$k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in Z$，

故f（x）的单调递减区间为$[k\pi+\frac{\pi}{3}，k\pi+\frac{5\pi}{6}]$，$k\in\mathbf{Z}$．

令$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$即为对称轴．

（2）令g（x）$=f$（x）$+1=\sin$（$2x-\frac{\pi}{6}$）．

由于g（x）$=f$（x）$+1<m$在$[0，\frac{\pi}{3}]$上恒成立，

由于$x\in[0，\frac{\pi}{3}]$，所以$2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6}，\frac{\pi}{2}]$，故$g$（$x$）$_{max}=g(\frac{\pi}{3})=1$．

所以$m>1$，故m的取值范围为（1，$+\infty$）．

19.【解答】解：（1）根据题意，要求切线在两坐标轴上的截距相等，且截距不为零，

则设切线方程为$x+y+m=0$（$m\neq 0$），

又由圆C：$x^2+y^2+2x-4y+3=0$，即（$x+1$）$^2+$（$y-2$）$^2=2$，

圆心C到切线的距离等于半径$\sqrt{2}$，则有$d=r=\frac{|m+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

解可得$m=-3$或1，

故要求所求的直线方程为$x+y+1=0$或$x+y-3=0$，

（2）根据题意，P（1，-2），则$|PC|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，

$|PA|=\sqrt{|PC|^2-2}=\sqrt{20-2}=3\sqrt{2}$

则有$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times|CA|\times|PA|=\frac{1}{2}|PC|\times\frac{|AB|}{2}$，

变形可得：$|AB|=\frac{2|CA|\times|PA|}{|PC|}=\frac{2\times\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$．

20.【解答】解：（1）因为$\frac{\cos C}{\cos A}=\frac{\sqrt{2}b-c}{a}$，

所以$a\cos C=$（$\sqrt{2}b-c$）$\cos A$，

由余弦定理，有$\sin A\cos C=$（$\sqrt{2}\sin B-\sin C$）$\cos A$，

化简可得$\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sqrt{2}\sin B\cos A$，

可得$\sin$（$A+C$）$=\sin B=\sqrt{2}\sin B\cos A$，

因为B是$\triangle ABC$的内角，于是$\sin B\neq 0$，

故$\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$A=45°$．

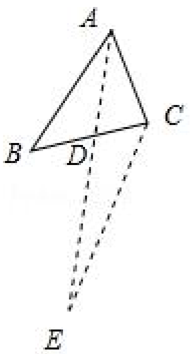
（2）延长 AD 至 E，使得 $AD=DE$，于是 $\angle ACE=135°$，

由余弦定理可得 $AE^2=AC^2+CE^2-2AC\cdot CE\cdot\cos\angle ACE$，即 $29=8+CE^2+2\times 2\sqrt{2}\times CE\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $CE=3$，或 -7（舍去），

于是 $AB=CE=3$，

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$.



21.【解答】解：（1）设椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），

因为离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}$…①

又直线 AB 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即 $bx+ay-ab=0$，

又圆心到直线 AB 的距离为圆的半径 $\sqrt{\frac{12}{7}}$，所以 $\frac{|-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{12}{7}}$…②

联立①②可得：$a^2=4$，$b^2=3$，

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）由（1）知，过点 M（-1，0）的直线与椭圆 G 相交于 P，Q 两点，

则三角形 NPQ 的周长为 $4a=8$，又当三角形 NPQ 的面积最大时，其内切圆面积最大，

设直线 l 的方程为 $x=ky-1$，P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），

联立 $\begin{cases}x=ky-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去 x 可得：$(4+3k^2)y^2-6ky-9=0y^2-6ky-9=0$，

所以 $y_1+y_2=\frac{6k}{4+3k^2}$，$y_1y_2=-\frac{9}{4+3k^2}$，

所以三角形 NPQ 的面积 $S=\frac{1}{2}|MN|\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{(\frac{6k}{4+3k^2})^2+\frac{36}{4+3k^2}}=\frac{12\sqrt{k^2+1}}{4+3k^2}$，

令 $\sqrt{1+k^2}=t$，则 $t\geqslant1$，

所以 $S=\frac{12t}{3t^2+1}=\frac{12}{3t+\frac{1}{t}}$，

令 $f(t)=3t+\frac{1}{t}$，易知 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $S=\frac{12}{3t+\frac{1}{t}}\leqslant\frac{12}{3+1}=3$，当且仅当 $t=1$ 时取等号，

即当 $k=0$ 时，三角形 NPQ 的最大值为 3，

由 $S_{\triangle NPQ}=\frac{1}{2}\cdot4a\cdot r=3$，所以 r 的最大值为 $\frac{3}{4}$，

所以内切圆面积的最大值为 $\frac{9\pi}{16}$.

22.【解答】解：（1）因为线段 QN 的中垂线交线段 QM 于点 C，则 $|CQ|=|CN|$，

所以 $|CM|+|CN|=|CM|+|CQ|=|QM|=4>|MN|=2$，

由椭圆的定义可知：动点 C 的轨迹为以原点为中心的椭圆，

其中 $2a=4$，$2c=2$ 又 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以曲线 E 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）设直线 $y=x-1$ 与曲线 E 的交点坐标为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

联立 $\begin{cases}y=x-1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，消去 y 得 $7x^2-8x-8=0$，

$\triangle=64-4\times7\times(-8)=288$，

$x_1+x_2=\frac{8}{7}$，$x_1x_2=-\frac{8}{7}$

所以弦长为 $\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\times\frac{12\sqrt{2}}{7}=\frac{24}{7}$.

（3）设直线 l：$y=kx+m$ 与椭圆 E 的交点坐标为 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$消去$y$得（$3+4k^2$）$x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

判别式$\triangle=64k^2m^2-$（$16m^2-48$）（$3+4k^2$）$=192k^2-48m^2+144$，

$x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$，

$k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{(kx_1+m)(x_2-2)+(kx_2+m)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$=\frac{2kx_1x_2+(m-2k)(x_1+x_2)-4m}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=3$，

化简得（$2k-3$）（$4m^2-12$）+（$m-2k+6$）（$-8km$）-（$4m+12$）（$3+4k^2$）$=0$，

也即（$m+2k$）（$m+2k+1$）$=0$，

当$m=-2k$时，直线$y=kx+m=k$（$x-2$）过点B，不符合题意，

所以$m=-2k-1$，此时直线$y=kx+m=k$（$x-2$）-1，且过定点（2，-1），

又因为点D在以AB为直径的圆上，

所以A在直线$y=kx+m=k$（$x-2$）-1上，

所以存在定点A（2，-1）满足条件．