

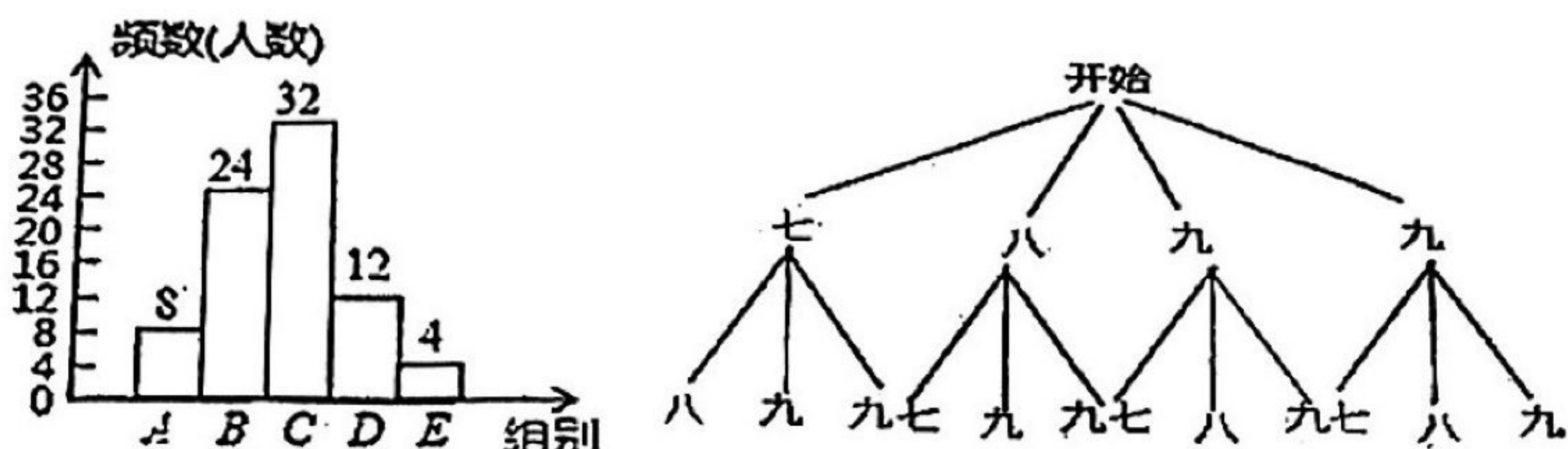
1—5 DCBDA      6—8 ACA

9. AC      10. ABC      11. ACD      12. ABD

13. 12      14. 0      15.  $5\sqrt{2}$       16.  $\left[\frac{21}{16}, 3\right]$ 

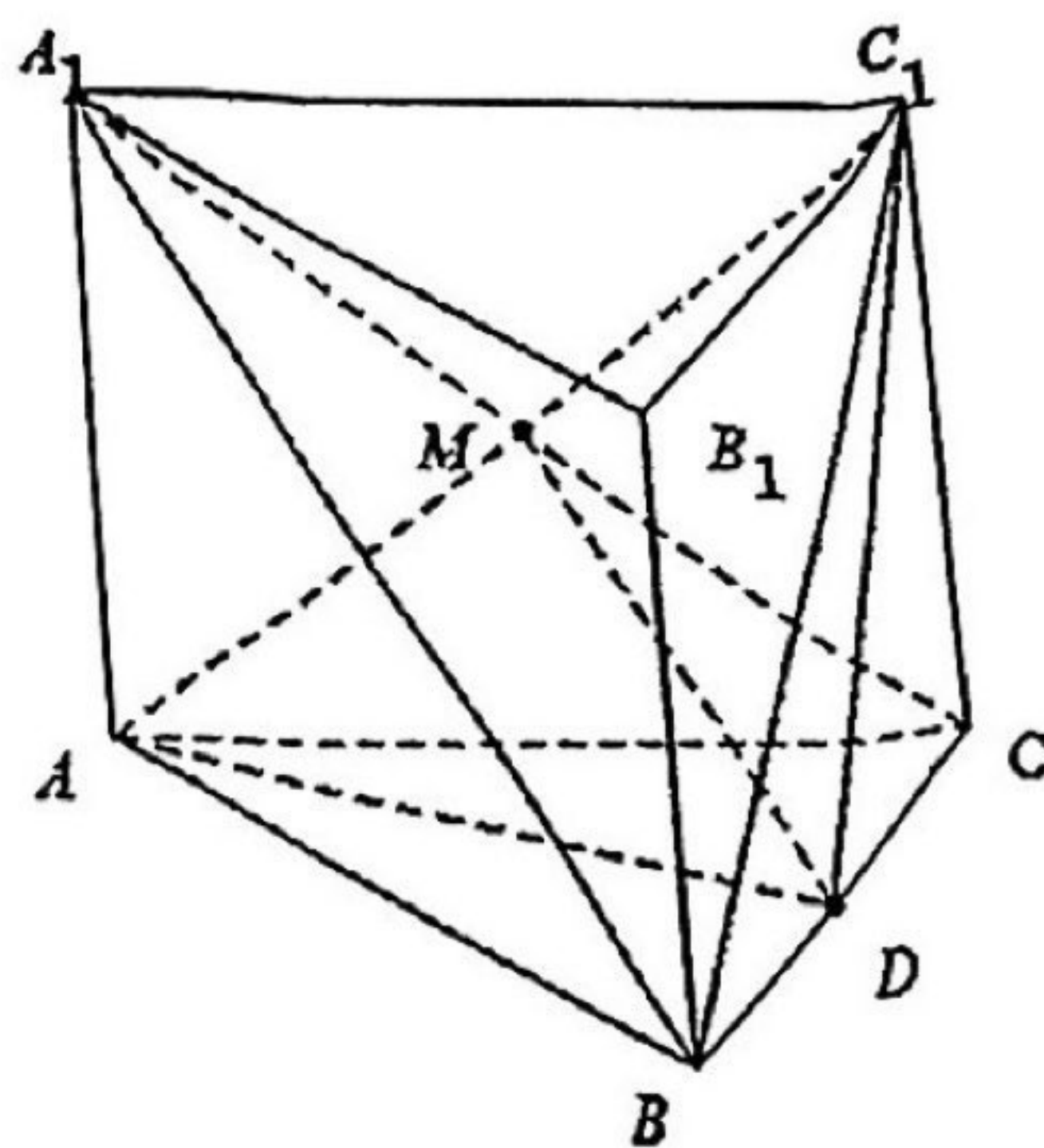
17. 解: (1) 80, C, 108.

(2) 如图所示(3)画树状图为:



共 12 种可能, 抽取的两名学生都来自九年级的有 2 种可能,

$$\therefore P(\text{两个学生都是九年级}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

答: 抽取的两名学生都来自九年级的概率为  $\frac{1}{6}$ .18. 解: (1) 连接  $A_1C$ , 与  $AC_1$  相交于  $M$ , 连接  $DM$ ,则  $M$  是  $CA_1$  的中点, 又  $D$  为  $BC$  的中点, $\therefore BA_1 \parallel DM$ ,  $BA_1 \not\subset$  平面  $AC_1D$ ,  $DM \subset$  平面  $AC_1D$ , $\therefore A_1B \parallel$  平面  $AC_1D$ .(2) 在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AA_1=1$ ,  $AB=3$ , 点  $D$  为  $BC$  的中点.

$$\therefore AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8},$$

$$\text{故三棱锥 } B-AC_1D \text{ 的体积 } V_{B-AC_1D} = V_{C_1-ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{8} \times 1 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

19. 解: (1)  $\because \frac{\sin A}{\sin B - \sin C} = \frac{b+c}{b-a}$ , 由正弦定理得  $\frac{a}{b-c} = \frac{b+c}{b-a}$ ,

$$\therefore a(b-a) = (b+c)(b-c), \text{ 即 } a^2 + b^2 - c^2 = ab, \therefore \cos C = \frac{1}{2}.$$

$$\because C \in (0, \pi), \therefore C = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 在  $\triangle BCD$  中, 由余弦定理知:  $a^2 + (2b)^2 - 2 \times a \times 2b \times \cos 60^\circ = 2^2$ ,

$$\text{即 } a^2 + 4b^2 - 2ab = 4, \text{ 即 } a^2 + 4b^2 = 4 + 2ab.$$

又  $a^2 + 4b^2 \geq 4ab$ , 当且仅当  $a = 2b$  即  $a = 2, b = 1$  时取等号,

$$\text{即 } 4 + 2ab \geq 4ab, \text{ 即 } ab \leq 2, \therefore S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}ab \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

20. 解: (1) 取  $PB$  的中点为  $G$ , 连接  $EG, FG$ ,

因为  $E, G$  分别为所在棱的中点, 故  $EG \parallel BC, EG = \frac{1}{2}BC$ ,

而  $DF = \frac{1}{2}AD, AD \parallel BC, AD = BC$ , 故  $EG \parallel DF, EG = DF$ ,

故四边形  $DEGF$  为平行四边形, 所以  $FG \parallel DE$ ,

而  $FG \subset$  平面  $PBF, DE \not\subset$  平面  $PBF$ , 故  $DE \parallel$  平面  $PFB$ .

(2) 设  $DC = a$ , 连接  $CF$ , 设  $C$  到平面  $PBF$  的距离为  $h$ .

因为  $PD \perp$  底面  $ABCD, CD \subset$  平面  $ABCD$ , 故  $PD \perp CD$ ,

同理  $PD \perp AD, PD \perp BC$ , 而  $PD = DC$ , 故  $PC = \sqrt{2}a$ ,

$$\text{故 } PF = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a, \text{ 同理 } BF = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

因为  $BC \perp CD$ , 而  $PD \cap DC = D$ , 故  $BC \perp$  平面  $PCD$ ,

而  $PC \subset$  平面  $PCD$ , 故  $BC \perp PC$ , 所以  $PB = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$ ,

$$\text{故 } S_{\triangle PFB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}a \times \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a^2, \text{ 又 } S_{\triangle FCB} = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{a^2}{2},$$

$$\text{因为 } V_{P-FCB} = V_{C-PFB}, \text{ 故 } \frac{1}{3} \times a \times \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{3} \times h \times \frac{\sqrt{6}}{4}a^2, \text{ 故 } h = \frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

$$\text{设 } PC \text{ 与面 } PFB \text{ 所成角为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

21. 解: (1) 若  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $\angle C = \angle A = 30^\circ$ , 则  $MP \parallel BC$ ,

又  $P$  为中点, 所以  $M$  为  $BA$  中点, 所以  $PM \parallel BC$  且  $PM = \frac{1}{2}BC = 2$ ,

又因为  $\angle MPN = 90^\circ$ ，所以  $\angle PNC = 90^\circ$ 。

因为  $\triangle ABC$  为等腰三角形  $AC = 4\sqrt{3}$ 。

所以在  $\text{Rt}\triangle PNC$  中,  $PN = \sqrt{3}$ , 所以在  $\text{Rt}\triangle PMN$  中,  $MN = \sqrt{7}$  (千米)

(2) 设  $\angle APM = \theta$ ,  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $\angle AMP = 150^\circ - \theta$ ,  $\angle NPC = 90^\circ - \theta$ ,  $\angle PNC = 60^\circ + \theta$

在  $\triangle APM$  中,  $\frac{AP}{\sin(150^\circ - \theta)} = \frac{PM}{\sin 30^\circ}$ , 所以  $PM = \frac{\sqrt{3}}{\sin(150^\circ - \theta)}$

在  $\triangle CPN$  中,  $\frac{PC}{\sin(60^\circ + \theta)} = \frac{PN}{\sin 30^\circ}$ , 所以  $PN = \frac{\sqrt{3}}{\sin(60^\circ + \theta)}$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle PMN} &= \frac{1}{2} PM \cdot PN = \frac{3}{2 \sin(150^\circ - \theta) \sin(60^\circ + \theta)} \\ &= \frac{3}{2 \left( \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right)} \\ &= \frac{3}{2 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta + \frac{3}{4} \sin \theta \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 \theta \right)} \\ &= \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2\theta} \end{aligned}$$

因为  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以  $\sin 2\theta \in (0, 1]$ ,

所以  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时,  $\triangle PMN$  的面积的最小值为  $12 - 6\sqrt{3}$ 。

22. 解: (1) 连接  $BG$ , 因为  $G$  为菱形  $ABCD$  的边  $CD$  上的中点,

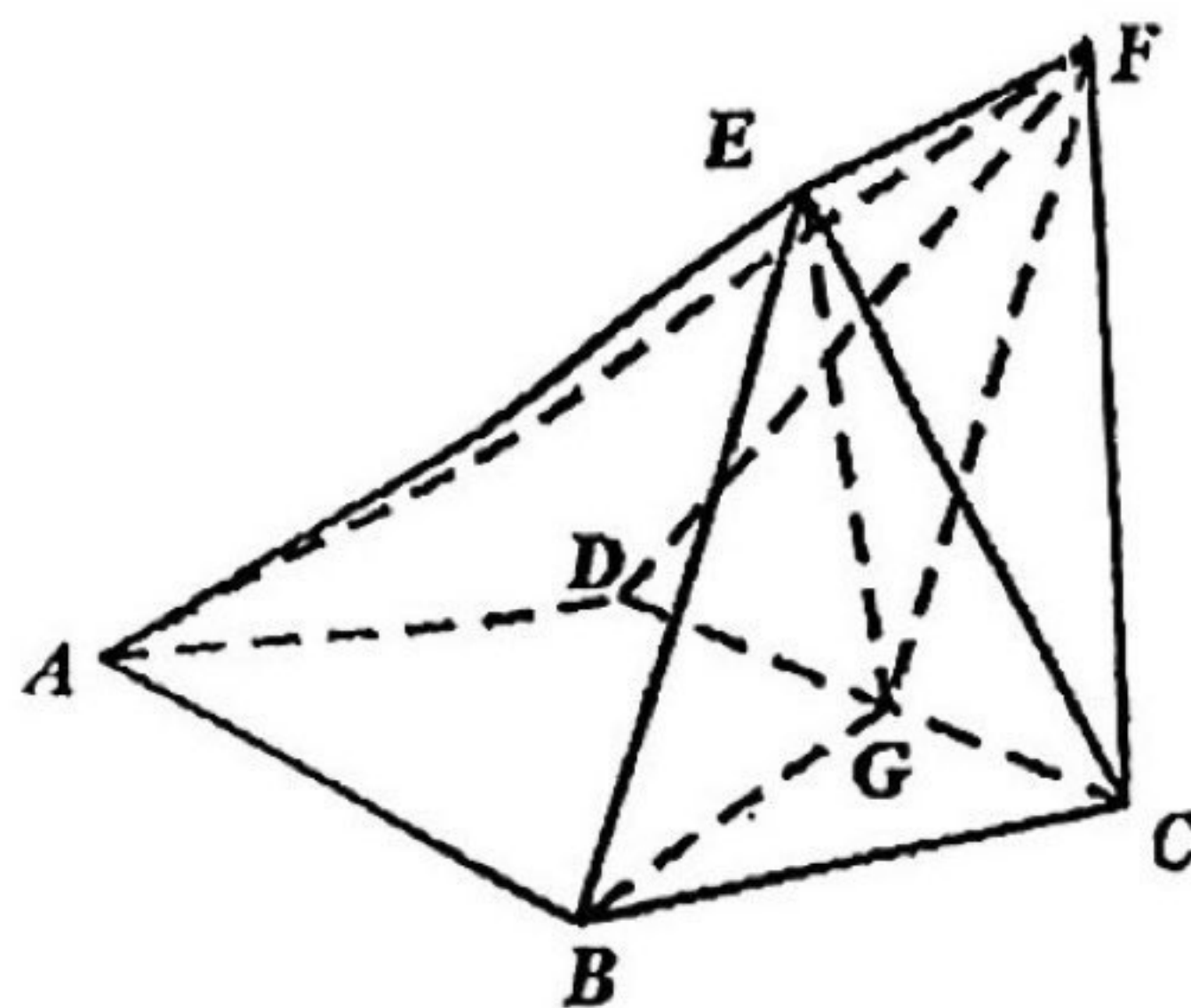
所以  $CG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}CB$ , 又  $\angle BCD = \angle BAD = 60^\circ$ ,

由余弦定理得  $BG^2 = CG^2 + CB^2 - 2CG \cdot CB \cos 60^\circ = \frac{3}{4}CB^2$ ,

$$\text{由 } BG^2 + CG^2 = \frac{3}{4}CB^2 + \frac{1}{4}CB^2 = CB^2,$$

知  $BG \perp CG$ ，即  $BG \perp CD$ ，

又  $AB \parallel CD$ ，所以  $AB \perp BG$ 。



根据题意, 有  $AB \perp BE$ 。

又  $BG$ ,  $BE$  都在平面  $BGE$  内, 且相交于点  $B$ , 所以  $AB \perp$  平面  $BEG$ 。

又  $EG \subset$  平面  $BEG$ , 所以  $AB \perp EG$ 。

在等边三角形  $\triangle CDF$  中, 因为  $G$  为  $CD$  的中点, 所以  $CD \perp GF$ 。

又在菱形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ , 所以  $AB \perp GF$ 。

因为  $EG$ ,  $GF$  都在平面  $EFG$  内, 且相交于点  $G$ , 所以  $AB \perp$  平面  $EFG$ 。

(2) 因为平面  $ABCD$  与平面  $CDF$  的交线为  $CD$ ,

由(1)知,  $BG \perp CD$ ,  $FG \perp CD$ , 所以  $\angle BGF$  为二面角  $A-CD-F$  的平面角,

设  $AB=2$ , 则有  $BE=EF=2$ ,  $BG=GF=\sqrt{3}$ 。

由(1)知,  $AB \perp$  平面  $BEG$ , 又  $AB \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以平面  $ABCD \perp$  平面  $BEG$ 。

过点  $E$  作  $EM \perp BG$  交  $BG$  于点  $M$ ,

则有  $EM \perp$  平面  $ABCD$ 。

又  $\triangle BEC$  为等边三角形,

所以  $BM=CM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $GM=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $EM=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ,  $EG=\sqrt{3}$ 。

在  $\triangle BEG$  和  $\triangle EFG$  中, 由余弦定理得

$$\cos \angle BGE = \frac{BG^2 + EG^2 - BE^2}{2BG \cdot EG} = \frac{1}{3}, \quad \cos \angle EGF = \frac{EG^2 + FG^2 - EF^2}{2EG \cdot FG} = \frac{1}{3},$$

所以  $\angle BGE = \angle EGF$ , 则  $\cos \angle BGF = \cos 2\angle BGE = 2\cos^2 \angle BGE - 1 = -\frac{7}{9}$ ,

所以平面  $CDF$  与平面  $ABCD$  所成的锐二面角的余弦值为  $|\cos \angle BGF| = \frac{7}{9}$ 。

